

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
FÍSICAS

**EFEECTO CASIMIR DINÁMICO PARA MEDIOS  
SEMITRANSSPARENTES**

**Alberto León Giraldo Zuluaga**  
Maestrando

**Dr. César D. Fosco**  
Director

**Miembros del Jurado**  
Dr. Gonzalo Torroba (Instituto Balseiro)  
Dr. Marina Huerta (Instituto Balseiro)  
Dr. Sergio Grillo (Instituto Balseiro)

Diciembre de 2016

Partículas y Campos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



A todas mis personas, por aventarse conmigo al vacío, y llenarlo de fluctuaciones



# Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Introducción	1
<b>1. Espejos en movimiento normal oscilatorio</b>	<b>7</b>
1.1. Un espejo móvil . . . . .	8
1.1.1. Orden $\lambda$ . . . . .	9
1.1.2. Orden $\lambda^2$ . . . . .	10
1.1.3. Orden $\lambda^3$ . . . . .	17
1.2. Dos espejos móviles . . . . .	19
1.2.1. Orden $\lambda_L \lambda_R$ . . . . .	19
<b>2. Movimiento lateral de las placas: Fricción de Casimir</b>	<b>25</b>
2.1. Espejos con defectos geométricos . . . . .	26
2.2. Espejos planos . . . . .	29
2.2.1. Modelo microscópico . . . . .	29
2.2.2. Integración de los grados de libertad de los espejos . . . . .	30
2.2.3. Extensión al caso de dos espejos . . . . .	31
2.3. Acción efectiva para espejos planos . . . . .	33
2.3.1. Evaluación Exacta . . . . .	33
2.3.2. Evaluación perturbativa al orden más bajo no trivial . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>A. Teorema de Gelfand-Yaglom</b>	<b>43</b>
A.1. Aplicación a potenciales tipo $\delta$ . . . . .	43
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

Agradecimientos
-----------------

51
----

# Resumen

La imposición de condiciones de borde no estacionarias a campos cuánticos puede llevar a la aparición de fenómenos disipativos. En este trabajo estudiaremos aquellos asociados a condiciones de borde en movimiento implementadas por espejos semitransparentes, en los casos de movimiento normal oscilatorio y movimiento lateral con velocidad constante. Encontraremos en cada caso la acción efectiva para un campo escalar real sujeto a las condiciones de borde mencionadas, y encontraremos la parte imaginaria de dicha acción efectiva. Mostraremos que para que esta sea no nula, cierto tipo de condiciones deben ser satisfechas. Estas van a estar relacionadas con la producción de partículas reales en el caso oscilatorio, o con la respuesta de los grados de libertad microscópicos de los espejos en el caso del movimiento lateral. Por lo tanto la aparición de una parte imaginaria en la acción efectiva puede relacionarse con la aparición de fenómenos disipativos.

**Palabras clave:** EFECTO CASIMIR DINÁMICO, FRICCIÓN DE CASIMIR, ENERGÍA DE VACÍO





# Abstract

Imposing non-stationary boundary conditions on quantum fields will generate dissipative effects. In this work, we study those associated with moving boundary conditions corresponding to semitransparent mirrors in two different situations: Normal oscillatory motion and sidewise motion at constant velocity. In both cases we construct the effective action for a real scalar field, and evaluate the conditions for a non-vanishing imaginary part of the effective action. This will be an indicator of the creation of real particles in the case of normal oscillatory motion, and of the response of microscopic degrees of freedom of the mirror, in the case of lateral motion. Both mechanisms are responsible of the occurrence of dissipative effects.

**Keywords:** DINAMICAL CASIMIR EFFECT, QUANTUM FRICTION, VACUUM ENERGY



# Introducción

*“No puede decirse que es el vacío, porque no es un qué”*

— César Fosco

El desarrollo de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos durante el último siglo han permitido describir el comportamiento de la Naturaleza a las escalas más pequeñas, y establecer un marco que explique la mayoría de las interacciones fundamentales que conocemos hasta el momento. Quizás una de las consecuencias menos intuitivas que ha traído consigo el desarrollo de estas teorías, es que el vacío difiere radicalmente de la idea convencional que tenemos de él: no corresponde a la nada, sino más bien es una especie de éter en constante dinamismo en el que se están creando y destruyendo partículas virtuales.

La analogía entre los campos cuánticos y un número infinito de osciladores armónicos tiene como consecuencia que la energía más baja -asociada al vacío- no toma un valor nulo. Podemos ilustrar esto a partir del Hamiltoniano de un campo escalar libre, sin masa, en tres dimensiones espaciales:

$$H = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

donde para el caso no masivo  $\omega_k = |\mathbf{k}|$ .  $a_{\mathbf{k}}$  y  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  corresponden a operadores de aniquilación y creación de partículas con impulso  $\mathbf{k}$  respectivamente. Si denotamos el vacío como  $|0\rangle$ , podemos encontrar que la energía asociada a este estado como

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \langle 0 | H | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{d|\mathbf{k}|}{4\pi^2} |\mathbf{k}|^3 \quad (2)$$

donde se ha impuesto que el vacío corresponda a un estado sin partículas, es decir que  $a_k|0\rangle = 0$ . La energía encontrada en (2) es claramente divergente. A esta energía se le conoce como *energía de punto cero*, que si bien es infinita, no es observable (salvo tal vez en el caso del término de constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein) y por lo tanto no tiene ninguna implicación física. Para tener alguna manifestación de esta energía de punto cero se deben considerar situaciones diferentes al vacío libre.

Por ejemplo, mediante restricciones debidas a la presencia de objetos que impongan condiciones de borde sobre los campos. En tales sistemas, interesa conocer la respuesta ante variaciones de tales condiciones.

En 1948 H. B. G. Casimir [1] consideró un ejemplo en el que esta modificación del vacío puede ser implementada a través de dos placas paralelas enfrentadas, separadas por una distancia  $a$ . Si las placas se consideran como conductoras perfectas, esto impone una condición sobre los posibles modos del campo que se pueden propagar, dado que la componente tangencial del campo eléctrico y la normal del campo magnético<sup>1</sup> deben anularse en la superficie de los conductores. La idea de Casimir apuntó en el mismo sentido de lo que establece la mecánica clásica, que solo las diferencias de energía tienen un significado Físico. Por lo tanto, al estudiar como variaba la energía de vacío del campo electromagnético al cambiar la separación  $a$ , encontró que aparece una fuerza atractiva, cuya magnitud por unidad de área está dada por:

$$\mathcal{F}(a) = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} . \quad (3)$$

Debido que en la electrodinámica clásica la fuerza entre dos placas neutras es cero, este efecto tiene un carácter netamente cuántico, conocido con el nombre de *Efecto Casimir*, y su estudio teórico ha tomado un especial protagonismo durante los últimos 40 años.

Una extensión natural de esto es considerar que las placas no son estáticas, sino que tienen algún tipo de fluctuación, por ejemplo se trata de un espejo oscilando. En este caso las condiciones de borde pasan a ser dependientes del tiempo y ocurre un fenómeno análogo a la producción de pares en el vacío debido a la acción de un campo externo. En este caso la acción del campo está representada por la frontera que oscila, y por lo tanto realiza trabajo mecánico sobre el vacío, transfiriendo en las condiciones apropiadas, la energía necesaria para que se creen partículas reales. Dado que en este caso las condiciones de borde son no estacionarias, a este fenómeno se le denomina *Efecto Casimir dinámico* [2, 3]. Como todo fenómeno radiativo, este puede entenderse desde dos puntos de vista:

- En el caso de un agente externo que produjese la oscilación del espejo, este proceso se percibe como ocasionado por una fuerza disipativa como respuesta al cambio en la condición de borde.
- En el caso de un observador que mida las propiedades del campo electromagnético, este fenómeno se manifiesta como la creación de fotones reales partiendo inicialmente vacío.

---

<sup>1</sup>La componente normal de  $\mathbf{B}$  se anula en la superficie de un conductor perfecto para  $\omega \neq 0$

Si bien originalmente la motivación de esta idea era netamente teórica como un modelo para explicar la evaporación de agujeros negros, mediante mecanismos similares al del Efecto Unruh [4], desarrollos recientes han permitido que se logren comprobaciones experimentales en circuitos superconductores [5]. En el efecto Casimir dinámico la respuesta del vacío a la oscilación ocurre incluso si hay un único espejo. Se ha encontrado que la densidad de energía radiada por unidad de tiempo va a depender de la frecuencia ( $\Omega$ ) y la amplitud de la oscilación ( $l$ ) [6]:

$$\mathcal{E}(\Omega, l) = \frac{l^2 \Omega^5}{720 \pi^2} . \quad (4)$$

El estudio de los efectos de oscilaciones en las trayectorias de los espejos o de deformaciones de la superficie de estos, si bien es posible estudiarlo a través del método operatorial [7, 8], resulta muy dispendiosa su implementación. Es por esto que a mediados de los años 90 tomó fuerza el uso de métodos basados en integrales funcionales para estudiar la respuesta del vacío a condiciones de borde con pequeñas oscilaciones en su geometría [9]. Si bien la motivación inicial fue estudiar la respuesta a la fluctuación de superficies perfectamente reflectantes (que se denominan *Espejos perfectos* e implementan condiciones de borde tipo Dirichlet) para un campo escalar real, este método se ha extendido a condiciones de borde dispersivas, las cuales admiten un desarrollo perturbativo respecto los parámetros que miden la respuesta de los grados de libertad microscópicos de los espejos a las fluctuaciones del campo cuántico [10]. En ambos casos las consideraciones de las fluctuaciones geométricas o las oscilaciones de las placas se han incluido de manera perturbativa hasta los primeros ordenes no triviales. En estos trabajos se encontró que la respuesta del vacío a las fluctuaciones en las condiciones de borde se va a producir solo si ciertas condiciones se satisfacen, y que el umbral para que esto ocurra va a estar indicado por el hecho de que cierta función de respuesta desarrolle una parte imaginaria.

Adicional a este fenómeno, también el movimiento de las condiciones de borde puede generar efectos disipativos que no sean debidos a la excitación de partículas reales del campo de vacío. Por ejemplo si ahora consideramos dos placas en movimiento relativo con velocidad constante en una dirección paralela a su superficie, en este caso se produce una excitación en los grados de libertad microscópicos de las placas. Esto puede entenderse como una consecuencia del intercambio de fotones virtuales entre las dos superficies, generando una fricción de no contacto. Si bien los fenómenos de fricción asociados a radiación han sido discutidos desde hace mucho tiempo [11], recientemente ha cobrado relevancia su estudio en cuerpos macroscópicos. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *fricción cuántica* o *fricción de Casimir*. Dado su carácter cuántico, esta fricción persiste incluso a temperatura cero. Usualmente se supone que

la constante dieléctrica del material, que en este caso correspondería a una función de respuesta, tiene características disipativas, y por lo tanto tiene asociada una parte imaginaria no nula.

Algunas consideraciones de medios no dispersivos han sido realizadas, donde las superficies corresponden a semiespacios caracterizados por una constante dieléctrica real, tal que la velocidad de propagación de la luz en el medio sea  $v < c$ . En este caso solo aparece fricción cuántica si la velocidad relativa entre los dos semiespacios supera la velocidad de fase de la luz en el material, y puede interpretarse como un análogo cuántico del efecto Cherenkov clásico [12].

Si bien este es un tema de gran interés en la comunidad científica, existe un amplio debate si este fenómeno es una manifestación de las fluctuaciones de vacío y aún no se alcanza evidencia experimental de su ocurrencia [13–16].

En este trabajo abordaremos el estudio del efecto Casimir dinámico y la fricción de Casimir para un campo escalar real, sujeto a condiciones de borde generadas por espejos semitransparentes, usando métodos de integrales funcionales. Para cumplir con esto, construiremos la acción efectiva, la cual está relacionada con la amplitud de persistencia del vacío, y para todos los casos estudiados calcularemos bajo qué condiciones dicha acción efectiva desarrolla una parte imaginaria. Veremos que esto es indicio de que potencialmente aparecen fenómenos disipativos; en el caso de efecto Casimir dinámico esto indicará que se supere el umbral de creación de pares, mientras que en el caso de fricción estará relacionado con la respuesta de los grados de libertad microscópicos de los espejos.

En el capítulo 1 consideramos sistemas en las que los espejos presentan un movimiento oscilatorio en la dirección normal a la superficie. Inicialmente analizaremos el caso de un único espejo, y extenderemos al caso de dos espejos que forman una cavidad. Mostraremos que para diferentes órdenes en constantes que miden la respuesta de los espejos a las fluctuaciones del campo escalar, es posible obtener la parte imaginaria de la acción efectiva de manera explícita para ciertas funciones oscilatorias que definen su trayectoria.

En el capítulo 2 tendremos en cuenta que los espejos se mueven en una dirección paralela a su superficie. En la primera parte aprovecharemos resultados del capítulo 1 para estudiar placas con defectos geométricos continuos. Calcularemos la parte imaginaria de la acción efectiva y encontraremos una condición sobre la velocidad de fase de las placas para que esta sea no nula y sea un indicio de la ocurrencia de algún fenómeno disipativo.

Finalmente, consideramos espejos planos que presentan algún tipo de comportamiento dispersivo. En este caso obtendremos un resultado no perturbativo para la acción efectiva, y comprobaremos que al orden más bajo no trivial el cálculo de una par-

te imaginaria no nula para la acción efectiva está directamente relacionada con las propiedades dispersivas del material de los espejos.





# Capítulo 1

## Espejos en movimiento normal oscilatorio

Como se mencionó en la Introducción, la existencia de condiciones de borde dependientes del tiempo puede generar un fenómeno interesante, por el cual se producen excitaciones (partículas reales) del campo cuántico. Este fenómeno es similar a cuando se supera el umbral de creación de pares en un sistema en presencia de un campo externo.

En este capítulo, consideraremos que la acción del campo externo está representada por condiciones de borde móviles, definidas por medio de funciones oscilatorias  $q(x_0)$ . El sistema estará descrito por un campo escalar real con condiciones de borde impuestas por la presencia de espejos semitransparentes. Estas condiciones de borde serán implementadas a través de un término de interacción que es una potencia de los campos, definido a partir de una constante de acople  $\lambda$ , la cual está relacionada con la respuesta de los grados de libertad microscópicos de los espejos a la interacción con el campo cuántico.

Debido a que los espejos son semitransparentes, un desarrollo perturbativo en la constante de acople es admisible. En este capítulo evaluaremos la acción efectiva a orden 2 y 3 en  $\lambda$  para el caso de un solo espejo, imponiendo las condiciones por medio de un potencial de interacción cuadrático en el campo. El resultado que se obtiene es no perturbativo en los parámetros que definen las trayectorias de los espejos. El objetivo principal de esto es evaluar bajo que condiciones la acción efectiva a los ordenes mencionados desarrolla una parte imaginaria, lo cual es una señal de la aparición de efectos disipativos debido a las oscilaciones de las condiciones de borde. Tomaremos el límite de amplitudes pequeñas con el fin de comparar con trabajos anteriores en los que se hizo un desarrollo perturbativo en amplitudes de la trayectoria  $q(x_0)$  [10]. En la parte final del capítulo, realizamos la extensión al caso de dos espejos al primer orden no trivial. Se muestra que para este caso aparece una condición interesante sobre las

frecuencias de los dos espejos: solo aparecerá una parte imaginaria en la acción efectiva si las frecuencias de los dos espejos son conmensurables.

## 1.1. Un espejo móvil

Empezaremos considerando el vacío con condiciones de borde generadas por la presencia de un único espejo móvil en un espacio tiempo en  $D = d + 1$  dimensiones. Como notación definimos  $x = (x_0, \dots, x_d)$  las coordenadas del espacio tiempo,  $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, \dots, x_{d-1})$  denotará a las coordenadas paralelas a la superficie de los espejos,  $x_d$  la coordenada en la dirección normal a la superficie del espejo. Además usaremos  $\int_x$  para denotar las integrales  $\int_{-\infty}^{\infty} dx$

El sistema estará entonces descrito por la acción:

$$S = S_0 + S_I \quad (1.1)$$

donde  $S_0$  hace referencia a la acción libre para el campo escalar  $\varphi$  de masa  $m$ , y  $S_I$  es el término de interacción del espejo con dicho campo; esto es:

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \int_x (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (1.2)$$

$$S_I[\varphi, q] = -\frac{\lambda}{2} \int_x \gamma^{-1}(t) \delta(x_d - q(x_0)) \varphi(x)^2 . \quad (1.3)$$

$\lambda$  es una constante de acople que mide la respuesta de los grados de libertad internos de los espejos. Hemos incluido el factor de Lorentz  $\gamma(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{q}^2(x_0)}}$ , pero dado que los regímenes de velocidades que consideraremos son no relativistas en adelante  $\gamma(t) = 1$ . Para este caso, el efecto disipativo no está tan fuertemente ligado a las propiedades microscópicas de los espejos sino, como se verá más adelante, está relacionado propiamente con la “intensidad” de la excitación; impuesta a través de la función  $q(x_0)$ . A partir de estas consideraciones podemos definir la acción efectiva a partir del formalismo de integral funcional:

$$e^{i\Gamma[q]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \equiv \mathcal{Z} . \quad (1.4)$$

Dado que el caso de espejos semitransparentes admite un desarrollo perturbativo en la constante de acople, realizaremos la expansión en cumulantes [17]. Para esto reescribimos (1.4) como

$$e^{i\Gamma[q]} = Z_0 \langle e^{iS_I[\varphi, q]} \rangle \quad (1.5)$$

donde hemos definido:

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS_0[\varphi]} \quad (1.6)$$

y se ha considerado el cálculo del valor medio de funcionales como:

$$\langle G[\varphi] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi G[\varphi] e^{iS_0[\varphi]}}{\mathcal{Z}_0} . \quad (1.7)$$

Haciendo explícito que  $\Gamma$  admite un desarrollo perturbativo escribamos:

$$\Gamma[q] = \Gamma^{(0)} + \Gamma_I = \Gamma^{(0)} + \Gamma_I^{(1)} + \Gamma_I^{(2)} + \dots \quad (1.8)$$

donde  $\Gamma_I^{(k)}$  hace referencia al término de orden  $k$  en el desarrollo perturbativo. Es claro que el orden cero depende exclusivamente de la acción libre, la cual es independiente de  $q(x_0)$ , por lo tanto será excluida del análisis. Los subíndices  $I$  hacen referencia precisamente a que la información de la interacción está en  $S_I[\varphi, q]$ , y el desarrollo para potencias no nulas de las constantes  $\lambda$  dependerá de este término. Comparando (1.8) y (1.5) tendremos <sup>1</sup>:

$$\Gamma_I = -i \log \langle e^{iS_I} \rangle = -i \log \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle (iS_I)^n \rangle}{n!} \right] , \quad (1.9)$$

donde la expansión del lado derecho de (1.9) determina la forma que tiene cada término de  $\Gamma_I$  orden a orden.

Como se verá para los ordenes resueltos, solo las componentes conexas contribuyen y por lo tanto serán las únicas evaluadas.

### 1.1.1. Orden $\lambda$

El orden lineal tomará la forma:

$$\Gamma_I^{(1)} = \langle S_I \rangle = -\frac{\lambda}{2} \int_x \delta(x_d - q(x_0)) \langle \varphi(x) \varphi(x) \rangle \quad (1.10)$$

donde  $\langle \varphi(x) \varphi(x) \rangle$  corresponde a la función de dos puntos evaluada en el mismo argumento. Dado que hemos escogido el formalismo de la integral funcional, la función de correlación de dos puntos va a estar dada a partir del propagador de la teoría, que en este caso corresponde a un campo escalar masivo, esto es:

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = \Delta(x - y) \equiv \int_p \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\eta} e^{ip(x-y)} . \quad (1.11)$$

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante suprimiremos las dependencias funcionales

Dado que estamos considerando la formulación en tiempo real, los productos escalares estarán dados a través de la métrica de Minkowski. Al evaluar (1.11) en el mismo argumento, dicha función es independiente de las coordenadas. Ilustraremos el cálculo de este orden para el caso no masivo. Tendremos entonces:

$$\langle \varphi(x) \varphi(x) \rangle = \int_p \frac{1}{p^2}, \quad (1.12)$$

donde  $p$  es el momento. Esta contribución es claramente divergente en el ultravioleta. Si fijamos un cutoff  $\Lambda$ , podemos evaluar esta integral en coordenadas esféricas obteniendo como resultado:

$$\langle \varphi(x) \varphi(x) \rangle = K \Lambda^{d-1}, \quad (1.13)$$

donde  $d - 1$  corresponde a la dimensión del espacio paralelo a la superficie de los espejos, y  $K$  es una constante. Dada la independencia de las coordenadas, en (1.10) puede realizarse la integral sobre las coordenadas paralelas a la superficie de los espejos, obteniendo como resultado para este primer orden en  $\lambda$ .

$$\Gamma_I^{(1)} = -m_\Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \quad (1.14)$$

donde hemos definido  $\frac{\lambda}{2} K (L\Lambda)^{d-1} \equiv m_\Lambda$ , siendo  $L^{d-1}$  el área de los espejos.

Dimensionalmente  $[m_\Lambda] = [\lambda] = 2$ , por lo tanto la contribución a este orden puede pensarse como una renormalización a la masa de los espejos la cual también estará presente el caso relativista.

### 1.1.2. Orden $\lambda^2$

El orden cuadrático en  $\lambda$  para (1.9) puede escribirse como:

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{i}{2} (\langle (S_I)^2 \rangle - \langle S_I \rangle^2) = \frac{i}{2} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^2 \rangle \equiv \frac{i}{2} \langle (S_I)^2 \rangle_c \quad (1.15)$$

donde el subíndice  $c$  hace referencia a la parte conexas. Usando la definición de  $S_I$ , los términos involucrados en (1.15) se puede evaluar usando las funciones de correlación para los campos, calculadas mediante el Teorema de Wick. Un esquema de como serían escritos estos términos usando diagramas de Feynman se muestra en la figura 1.1.

Evaluando cada término tendremos:

$$\begin{aligned}
 \langle (S_I)^2 \rangle &= \frac{\lambda^2}{4} \int_{x,y} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) \langle \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 \rangle \\
 &= \frac{\lambda^2}{4} \int_{x,y} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) [2 \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle^2 + \langle \varphi(x) \rangle^2 \langle \varphi(y) \rangle^2] . \\
 \langle S_I \rangle^2 &= \frac{\lambda^2}{4} \int_{x,y} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) \langle \varphi(x) \rangle^2 \langle \varphi(y) \rangle^2
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

por lo tanto, el segundo orden de la acción efectiva estará dado por:

$$\Gamma_I^{(2)} = i \frac{\lambda^2}{4} \int_{x,y} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle^2 . \tag{1.17}$$

El correlador  $\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle$  corresponde al propagador del campo libre, escribiendo este

$$\begin{aligned}
 \langle (S_I) \rangle^2 &= \text{diagrama 1} \otimes \text{diagrama 2} \\
 \langle (S_I)^2 \rangle &= \text{diagrama 1} \otimes \text{diagrama 2} + 2 \times \text{diagrama 3}
 \end{aligned}$$

**Figura 1.1:** Desarrollo en diagramas de Feynman del orden 2 en  $\lambda$ . Se omiten las constantes implícitas en  $S_I$  e identificaciones de los puntos

en términos de su transformada de Fourier, (1.17) estará dado por:

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{1}{4} \int_k \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{x,y} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) \tilde{\Pi}^{(2)}(k) e^{ik(x-y)} . \tag{1.18}$$

habiéndose definido:

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) = i \lambda^2 \int_{\omega} \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \frac{1}{(\omega - k)^2 - m^2 + i\eta} . \tag{1.19}$$

Este paso al espacio de momentos hace que la única dependencia en las coordenadas aparezca en las distribuciones  $\delta$  y en las exponenciales. Notemos que no hay dependencia de las coordenadas  $\mathbf{x}_{||}$  salvo en las exponenciales, por lo tanto es posible integrar sobre estas obteniendo un producto de  $\delta$ ; esto es que si separamos las integrales sobre

las coordenadas como:

$$\begin{aligned}
 \int_x \delta(x_d - q(x_0)) e^{ikx} &= \int_x \delta(x_d - q(x_0)) e^{ik_0 x_0 - i\mathbf{k}_{||} \mathbf{x}_{||} - ik_d x_d} \\
 &= (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(\mathbf{k}_{||}) \int_{x_0} e^{i(k_0 x_0 - k_d q(x_0))} \\
 &\equiv (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(\mathbf{k}_{||}) \tilde{f}(k_0, k_d) .
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

podemos definir una función que solo depende de  $k_0$ ,  $k_d$ ,  $\tilde{f}(k_0, k_d) = \int_{x_0} e^{i(k_0 x_0 - k_d q(x_0))}$ . La integral sobre las coordenadas  $y$  corresponderá a un término análogo, pero con el signo cambiado en el exponente, por lo que puede pensarse como conjugada a (1.20). Podemos en este punto imponer la condición sobre la trayectoria del espejo, y es que su movimiento es oscilatorio y está definido como:

$$q(x_0) = \epsilon \cos(\Omega x_0) . \tag{1.21}$$

De acuerdo a (1.20),  $q(x_0)$  aparece en la exponencial, con la definición establecida en (1.21) puede usarse la expansión de Jacobi-Anger

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \tag{1.22}$$

siendo  $J_n(z)$  funciones de Bessel de primera especie con índice  $n$ . Podemos reescribir  $\tilde{f}(k_0, k_1)$

$$\tilde{f}(k_0, k_1) = \int_{x_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(\epsilon k_d) e^{i(k_0 - n\Omega)x_0} \tag{1.23}$$

Al considerar el término (1.20) y su complejo conjugado, la dependencia sobre  $\mathbf{k}_{||}$  aparece en un término  $\delta(\mathbf{k}_{||})^2$ , que al ser integrado genera un factor  $(2\pi L)^{d-1}$ .  $L$  tiene dimensiones de longitud y  $L^{d-1}$  puede pensarse como el 'área' de los espejos en  $d$  coordenadas espaciales. Esto implica que la acción efectiva es extensiva respecto al área de los espejos, obteniéndose para (1.18)

$$\frac{\Gamma_I^{(2)}}{L^{d-1}} = \frac{1}{4} \int_{k_0, k_d} \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{\Pi}^{(2)}(k) \Big|_{\mathbf{k}_{||}=0} \left| \tilde{f}(k_0, k_d) \right|^2 . \tag{1.24}$$

La definición de  $\tilde{f}(k_0, k_d)$  tiene implícita una integral sobre la coordenada temporal, que de acuerdo a (1.23) corresponde a  $2\pi\delta(k_0 - n\Omega)$ , la cual, al calcular el módulo y evaluar la integral sobre  $k_0$ , producirá un factor  $2\pi\delta_{nn'}T$ , donde  $T$  es la dimensión temporal y  $n'$  es el índice asociado en  $\tilde{f}(k_0, k_d)^*$ . Por lo tanto la acción efectiva es

proporcional al tiempo. Incluyendo estas consideraciones se tiene que:

$$\frac{\Gamma_I^{(2)}}{TL^{d-1}} = \frac{1}{4} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Pi}^{(2)}(k) \Big|_{k_0=n\Omega, \mathbf{k}_{||}=0} |J_n(k_d\epsilon)|^2. \quad (1.25)$$

Cómo ya se mencionó, se busca evaluar bajo que condiciones la acción efectiva desarrolla una parte imaginaria no nula, y de acuerdo al resultado (1.25) esto dependerá de que la contribución de  $\tilde{\Pi}^{(2)}(k)$  sea imaginaria. Una vez impuesta la condición, el signo de la parte imaginaria de  $\Gamma_I^{(2)}$  estará determinado por el signo de  $\text{Im}\tilde{\Pi}^{(2)}(k)$ . Para evaluar esta contribución, usaremos parámetros de Feynman, para lo cual reescribimos (1.19) usando la identidad:

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\delta(1 - \alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{[\alpha_1 A_1 + \dots \alpha_n A_n]^n} \quad (1.26)$$

dando como resultado:

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) = i \int_{\omega} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^D} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\omega^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2 - m^2 + i\eta]^2}. \quad (1.27)$$

Dado que la dependencia con  $\omega$  es cuadrática, la integral sobre  $\omega$  puede realizarse pasando a coordenadas esféricas en  $D = d + 1$ , lo que corresponde al uso de la siguiente identidad:

$$\int_p \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \Delta^{\frac{D}{2}-n} \quad (1.28)$$

donde se ha tenido en cuenta que hemos definido la acción en tiempo real. Identificando (1.28) con los términos correspondientes de (1.27), tendremos que  $\Delta = -\alpha(1 - \alpha)k^2 + m^2$ ,  $n = 2$ , y se ha suprimido la prescripción de los polos. Por lo tanto, la contribución del loop estará dada por:

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 d\alpha [-\alpha(1 - \alpha)k^2 + m^2]^{\frac{D}{2}-2} \quad (1.29)$$

y la evaluación de la parte imaginaria de la acción efectiva implicaría que:

$$\text{Im}(\gamma_I^{(2)}) = \frac{1}{4} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Im}[\tilde{\Pi}^{(2)}(k)] \Big|_{k_0=n\Omega, \mathbf{k}_{||}=0} |J_n(k_d\epsilon)|^2, \quad (1.30)$$

donde hemos definido  $\gamma_I^{(2)} \equiv \frac{\Gamma_I^{(2)}}{TL^{d-1}}$  que corresponderá a la acción efectiva por unidad de área por unidad de tiempo. Usando el resultado (1.29) tendremos que:

$$\text{Im}[\tilde{\Pi}^{(2)}(k)] = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \text{Im}\left(\int_0^1 d\alpha [-\alpha(1 - \alpha)k^2 + m^2]^{\frac{D}{2}-2}\right). \quad (1.31)$$

Esto permite establecer que la forma que adquiera la parte imaginaria de la acción efectiva dependerá de la dimensión del espacio tiempo que se quiera considerar, y que solo aparecerá cuando se cumplan ciertas condiciones entre la masa del campo, la componente  $k_d$  del impulso y el factor  $n\Omega$  que da cuenta de la excitación externa asociada al movimiento oscilatorio del espejo. Procederemos a concentrar nuestro análisis al caso masivo en  $D = 2$ , y los casos no masivos en  $D = 3$  y  $D = 4$ , ya que las integrales sobre  $\alpha$  pueden evaluarse explícitamente, usando la definición de la función Beta:

$$B(\beta, \sigma) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\beta + \sigma)} = \int_0^1 d\alpha \alpha^{\sigma-1} (1 - \alpha)^{\beta-1}. \quad (1.32)$$

Con estas consideraciones tendremos:

**Caso  $m \neq 0$ ,  $D = 2$ .**

$D = 2$  en (1.29) podemos evaluar la integral sobre  $\alpha$  con un sencillo cambio de variables, obteniendo como resultado:

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) = -\frac{\lambda^2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{k^2(4m^2 - k^2)}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{k^2}{4m^2 - k^2}} \right], \quad (1.33)$$

contribución que presenta una divergencia infrarroja si  $m = 0$ . Dejando a un lado el objetivo de determinar explícitamente la forma de la parte imaginaria, que sólo estudiaremos para  $m = 0$ , podemos determinar que la condición que implica que esta sea no nula es:

$$k^2 > 4m^2 \quad (1.34)$$

que corresponde a la condición usual para la producción de pares debido a la acción de un campo externo [18]. Con esto tendremos que aparecerá una condición sobre la frecuencia de oscilación del espejo comprobando la analogía entre este caso de efecto Casimir dinámico y el umbral para la producción de pares generadas por un campo externo.

**Caso  $m = 0$ ,  $D = 3$ .**

La evaluación de (1.29) da como resultado:

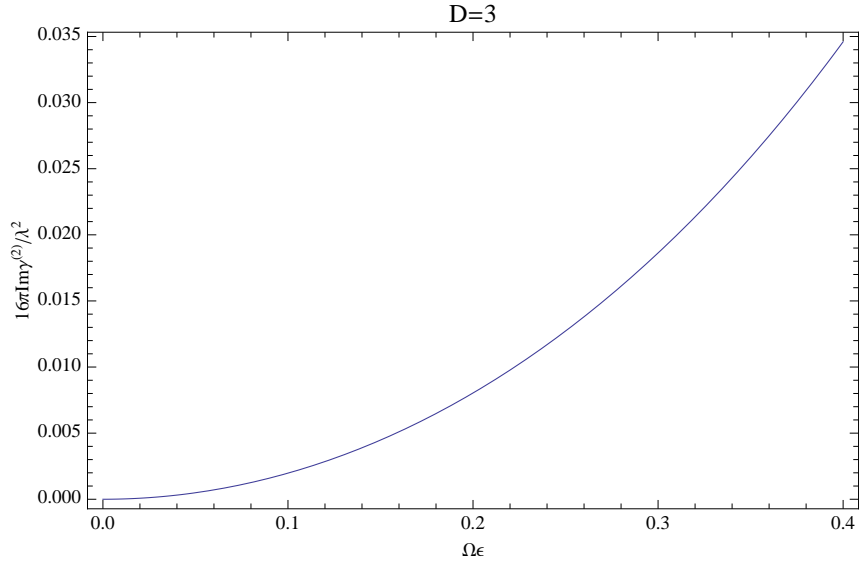
$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) \Big|_{\mathbf{k}_{||}=\mathbf{0}, k_0=n\Omega} = -\lambda^2 \frac{1}{8} [k_d^2 - (n\Omega)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.35)$$



cuya parte imaginaria será no nula si  $|n\Omega| > |k_d|$ . Esta condición puede implementarse introduciendo un factor  $\theta(|n\Omega| - |k_d|)$  en (1.30), lo cual implica que:

$$\text{Im}(\gamma_I^{(2)}) = \frac{\lambda^2}{16\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{|n\Omega|} dk_d \frac{[J_n(k_d\epsilon)]^2}{\sqrt{(n\Omega)^2 - k_d^2}} \quad (1.36)$$

donde hemos usado el hecho que el integrando es par sobre  $k_d$  y ante el intercambio de  $n \rightarrow -n$ . Podemos evaluar la integral y la suma en (1.40) de forma numérica. La figura 1.2 muestra el comportamiento de la parte imaginaria (1.40) como una función del factor adimensional  $\Omega\epsilon$ . Podemos observar que los efectos disipativos van a estar suprimidos para frecuencias o amplitudes de la oscilación muy bajas.



**Figura 1.2:**  $\text{Im}(\gamma_I^{(2)})$  como función del parámetro adimensional  $\Omega\epsilon$

### Caso $m = 0$ , $D = 4$

Para este caso debemos hacer un análisis un poco más detallado, ya que la integral de (1.27) sobre  $\omega$  presenta una divergencia logarítmica en el ultravioleta. Resolvemos esto planteando regularización dimensional para la integral y usando substracción minimal [19]. Definamos  $D = 4 - \varepsilon$ , en ese caso para (1.29) obtenemos:

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k) = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{(4-\varepsilon)/2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 d\alpha [-\alpha(1-\alpha)k^2]^{-\frac{\varepsilon}{2}} \quad (1.37)$$

donde hemos omitido la inclusión del parámetro de masa que adimensionaliza (1.37), ya que este parámetro no modifica la estructura analítica de este término. Considerando el límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos aproximar cualquier elemento elevado a una potencia de  $\varepsilon$  como  $a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \log a$ , y además realizar la expansión de las funciones  $\Gamma$  alrededor de

$\varepsilon = 0$ . Haciendo esto puede aproximarse (1.37) obteniendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(2)}(k) = & -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{(4-\varepsilon)/2}} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left( -\frac{\varepsilon}{2} \right) \\ & \times \left[ 1 + \log(-k^2) + \int_0^1 \log[\alpha(1-\alpha)] \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

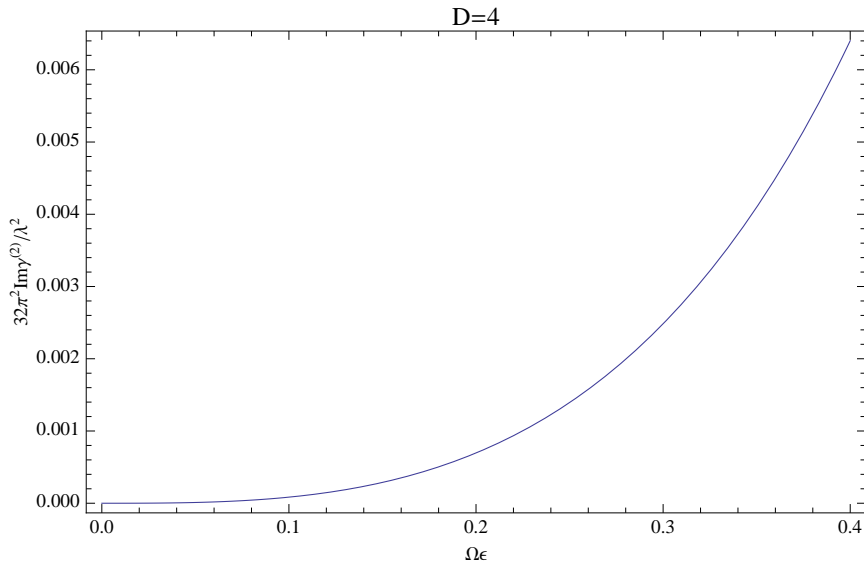
donde  $\gamma_E$  denota a la constante de Euler-Mascheroni. Al tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  y sustraer la parte divergente, el único término que desarrolla una parte imaginaria es el asociado a  $k^2$ . Realizando un análisis análogo al hecho en  $D = 3$  tendremos que la parte imaginaria (1.38) resulta:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[ \tilde{\Pi}^{(2)}(k) \right]_{k_0=n\Omega, |\mathbf{k}|=0} &= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \theta(|n\Omega| - |k_d|) \text{Im}[\log[-((n\Omega)^2 - k_d^2)]] \\ &= \frac{1}{16\pi} \theta(|n\Omega| - |k_d|) \end{aligned} \quad (1.39)$$

que implica que la parte imaginaria de la acción efectiva (1.40) está dada por:

$$\text{Im}(\gamma_I^{(2)}) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{|n\Omega|} dk_d [J_n(k_d\epsilon)]^2. \quad (1.40)$$

Igual que en el caso de dimensión 3, podemos evaluar la suma y la integral en (1.40) numéricamente. El comportamiento de la acción efectiva respecto al parámetro adimensional  $\Omega\epsilon$  se muestra en la figura 1.3. Podemos calcular el límite para bajas amplitudes.



**Figura 1.3:**  $\text{Im}(\gamma_I^{(2)})$  como función del parámetro adimensional  $\Omega\epsilon$

Desarrollando en potencias de  $\epsilon$  para (1.40), tendremos que:

$$\text{Im}(\gamma_I^{(2)}) = \frac{\lambda^2 \epsilon^2}{384\pi^2} |\Omega|^3. \quad (1.41)$$

resultado que coincide al considerar la función oscilatoria para la trayectoria del espejo (1.21) y un caso no masivo en los resultados obtenidos en [10].

La elección de valores de  $\Omega\epsilon < 1$  para analizar el comportamiento de la parte imaginaria de la acción efectiva no es arbitraria. De acuerdo a la función oscilatoria que hemos considerado en (1.21), este parámetro adimensional corresponde a la magnitud de la velocidad máxima con que podría oscilar el espejo, y dado que estamos considerando el caso no relativista la validez de los resultados se restringe para valores de  $\Omega\epsilon < 1$ .

### 1.1.3. Orden $\lambda^3$

Para el orden cúbico tendremos que la expansión de (1.9) implica:

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{(3)} &= -\frac{1}{3!} (\langle (S_I)^3 \rangle - 3\langle S_I \rangle \langle S_I^2 \rangle + 2\langle S_I \rangle^3) \\ &= -\frac{1}{3!} \langle (S_I - \langle S_I \rangle)^3 \rangle \equiv -\frac{1}{3!} \langle (S_I)^3 \rangle_c. \end{aligned} \quad (1.42)$$

El resultado de aplicar el teorema de Wick en estos casos, implica para el orden cúbico

$$\begin{aligned} \langle (S_I)^3 \rangle &= \text{diagrama 1} \otimes \text{diagrama 2} \otimes \text{diagrama 3} + 6 \times \text{diagrama 4} \otimes \text{diagrama 5} + 8 \times \text{diagrama 6} \\ \langle S_I \rangle \langle S_I^2 \rangle &= \text{diagrama 1} \otimes \text{diagrama 2} \otimes \text{diagrama 3} + 2 \times \text{diagrama 4} \otimes \text{diagrama 5} \\ \langle S_I \rangle^3 &= \text{diagrama 1} \otimes \text{diagrama 2} \otimes \text{diagrama 3} \end{aligned}$$

**Figura 1.4:** Desarrollo en diagramas de Feynman del orden 3 en  $\lambda$ . Al evaluar (1.42) solo sobrevive la contribución del loop triangular

de la acción efectiva:

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{(3)} &= \frac{1}{3!} \int_{x,y,z} \delta(x_d - q(x_0)) \delta(y_d - q(y_0)) \delta(z_d - q(z_0)) \\ &\quad \times \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \langle \varphi(y) \varphi(z) \rangle \langle \varphi(z) \varphi(x) \rangle \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde  $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$  es el propagador del campo libre. El cálculo correspondiente es totalmente análogo al hecho en 1.1.2. Presentaremos acá el resultado posterior a escribir los propagadores en espacios de momentos, integrar sobre las componentes  $\mathbf{k}_{||}$  y  $k_0$  (que implican la extensividad de  $\Gamma$  en el área de los espejos y el tiempo).

$$\begin{aligned} \gamma_I^{(3)} &= \frac{1}{3!} \int_{k_1^d, k_2^d} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} J_n(k_1^d \epsilon) J_{n'}(k_2^d \epsilon) J_{-n-n'}(-(k_1^d + k_2^d) \epsilon) \\ &\times \tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2) \Big|_{\mathbf{k}_2^{\parallel}=\mathbf{k}_1^{\parallel}=0, k_1^0=n\Omega, k_2^0=n'\Omega} \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde  $k_i^\mu$  denota la componente  $\mu$  del impulso  $i$ , y se ha definido  $\tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2)$  la función de tres puntos en el espacio de momentos dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2) &= \lambda^3 \int_{\omega} \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{\omega^2 - m^2 + i\eta} \frac{1}{(\omega - k_1)^2 - m^2 + i\eta} \\ &\times \frac{1}{(\omega - (k_1 + k_2))^2 - m^2 + i\eta} . \end{aligned} \quad (1.45)$$

A partir del resultado (1.44), evaluar la parte imaginaria de  $\gamma_I^{(3)}$  se reduce a encontrar  $\text{Im} [\tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2)]$ . Para evaluar esto podríamos proceder de manera análoga a lo hecho en la sección anterior: Resolver la integral sobre  $\omega$  en (1.45) usando parámetros de Feynman, y encontrar bajo que condiciones  $\tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2)$  desarrolla una parte imaginaria. Definiendo parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y aplicando (1.26) al caso de (1.45), podemos evaluar la integral sobre  $\omega$  usando la identidad (1.28) dando como resultado:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{(3)}(k_1, k_2) &= -i \frac{\lambda^3}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \times \\ &\times [(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 (k_1 + k_1))^2 - \alpha_1 k_1^2 - \alpha_2 (k_1 + k_2)^2 + m^2]^{\frac{D}{2}-3} . \end{aligned} \quad (1.46)$$

A medida que crece el número de parámetros sobre los cuales integrar, la tarea de encontrar la parte imaginaria de la contribución de los loops de manera directa puede resultar bastante desafiante. Si bien no hemos calculado ésta para el orden cúbico, algunos comentarios pueden hacerse para encarar el problema en futuros trabajos., en los que se podrían explotar las implicaciones de la unitariedad de la teoría que permiten relacionar la parte imaginaria de la contribución (1.46) con la discontinuidad que tendría esta misma al cruzar un corte, el cual aparecerá por el hecho de que las partículas asociadas al loop pasan a estar en capa de masa.

## 1.2. Dos espejos móviles

Ahora consideraremos el caso de dos espejos móviles, separados una distancia promedio  $a$ . El sistema estará descrito por una acción análoga a (1.1), donde ahora el término de interacción dará cuenta de los dos espejos, esto es:

$$S_I = S_I^L + S_I^R \quad (1.47)$$

donde los superíndices  $L, R$  hacen referencia a cada espejo. Estos términos pueden definirse análogamente a (1.3)

$$S_I^{L,R} = -\frac{\lambda_{L,R}}{2} \int_x \delta(x_d - q_{L,R}(x_0)) \varphi(x)^2 \quad (1.48)$$

donde las funciones que definen la trayectoria de cada espejo son:

$$q_R(x_0) = \epsilon_R \cos(\Omega_R x_0 + \delta_R) \quad , \quad q_L(x_0) = a + \epsilon_L \cos(\Omega_L x_0 + \delta_L) \quad , \quad (1.49)$$

siendo  $\delta_{L,R}$  las fases asociadas a la oscilación de cada espejo.

De acuerdo a los resultados obtenidos para un espejo, el orden lineal en  $\lambda$  contribuirá a un término de renormalización de la masa de cada espejo. Este orden es independiente de  $a$  y corresponde al caso donde cada espejo puede ser tratado de forma independiente y no es de interés para el análisis que queremos realizar en esta sección. Estudiaremos entonces el primer orden no trivial que corresponde al orden 2 en  $\lambda$ .

### 1.2.1. Orden $\lambda_L \lambda_R$

Para el análisis del orden cuadrático podemos partir del resultado (1.15) para el desarrollo perturbativo, pero ahora considerando la acción de interacción (1.48) obteniendo para la acción efectiva:

$$\Gamma_I^{(2)} = \frac{i}{2} \langle (S_I^L)^2 \rangle_c + \frac{i}{2} \langle (S_I^R)^2 \rangle_c + i \langle S_I^L S_I^R \rangle_c \quad (1.50)$$

Los dos primeros términos corresponden al caso de orden dos para un solo espejo, y pueden ser tratados de acuerdo a lo discutido en la sección anterior. En estos casos como los argumentos de las funciones oscilatorias aparecen solamente en la función  $\tilde{f}(k_0, k_1)$ , al tomar el módulo de esta se cancelan los términos asociados a las fases y la separación media, obteniendo para cada espejo el resultado (1.25). Consideremos entonces a este orden la contribución del último término, por lo que la acción efectiva

estará dada por:

$$\begin{aligned}\Gamma_I^{(2)} &= i \frac{\lambda_R \lambda_L}{4} \int_{x,y} \delta(x_d - q_R(x_0)) \langle \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 \rangle_c \delta(y_d - q_L(y_0)) \\ &= i \frac{\lambda_R \lambda_L}{2} \int_{x,y} \delta(x_d - q_R(x_0)) \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle^2 \delta(y_d - q_L(y_0)) .\end{aligned}\quad (1.51)$$

Podemos proceder de manera análoga al caso de un solo espejo, y escribir las funciones de correlación en términos de las transformadas de Fourier de los propagadores del campo libre obteniendo una expresión análoga a (1.18),

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{x,y} \delta(x_d - q_R(x_0)) \delta(y_d - q_L(y_0)) \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) e^{ik(x-y)} \quad (1.52)$$

al haber definido el loop de 2 puntos como:

$$\tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) = i \lambda_L \lambda_R \int_{\omega} \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} \frac{1}{(\omega - k)^2 - m^2 + i\eta} . \quad (1.53)$$

Cabe mencionar que el procedimiento solo sufre ligeras modificaciones respecto al caso de un solo espejo, asociadas al hecho que las trayectorias no son las mismas para los dos espejos, y por lo tanto usando una notación similar a la de la sección (1.1), definimos funciones  $\tilde{f}_{L,R}(k_0, k_d)$ , que permitirán reescribir las  $\delta(x_d - q_{L,R}(x_0))$  como

$$\int_x \delta(x_d - q_{L,R}(x_0)) e^{ikx} \equiv (2\pi)^{d-1} \delta^{d-1}(\mathbf{k}_{\parallel}) \tilde{f}_{L,R}(k_0, k_d) \quad (1.54)$$

donde cada función está dada por:

$$\tilde{f}_{L,R}(k_0, k_d) = \int_{x_0} e^{i(k_0 x_0 - k_d q_{L,R}(x_0))} \quad (1.55)$$

que al considerar (1.49), y emplear la identidad de Jacobi-Anger (1.22), la función (1.55) para cada espejo tomará la forma:

$$\tilde{f}_L(k_0, k_d) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \delta(k_0 - n\Omega_L) e^{in\delta_L + ik_d a} J_n(k_d \epsilon_L) \quad (1.56)$$

$$\tilde{f}_R(k_0, k_d) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \delta(k_0 - n\Omega_R) e^{in\delta_R} J_n(k_d \epsilon_R) . \quad (1.57)$$

Nuevamente, al integrar sobre  $\mathbf{x}_{\parallel}$  vemos que la acción efectiva es extensiva respecto

al área de las placas , lo que implica sobre (1.52) que:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L^{d-1}} &= \frac{1}{2} \int_{k_0, k_d} \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} i^{n-n'} \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \Big|_{\mathbf{k}_{||}=0} (2\pi)^2 \delta(k_0 - n\Omega_L) \\ &\quad \times \delta(k_0 - n\Omega_R) J_n(k_d \epsilon_L) J_{n'}(k_d \epsilon_R) e^{in\delta_R - in'\delta_L - ik_d a} \end{aligned} \quad (1.58)$$

La integral sobre  $k_0$  genera dos implicaciones interesantes. Como era de esperar, de acuerdo a la analogía con el caso de un espejo, la acción efectiva resulta proporcional a la extensión temporal  $T$ . Además, se tiene que  $n\Omega_R = n'\Omega_L$ ; esto quiere decir que la contribución será no nula solo si las frecuencias con las que oscilan los dos espejos son conmensurables, esto es.

$$\frac{\Omega_R}{\Omega_L} = \frac{n'}{n} \quad (1.59)$$

con  $n, n' \in \mathbb{Z}$ .

Podemos entonces considerar diferentes casos. La consideración más simple corresponde al caso en el que las frecuencias de los dos espejos son iguales, que de acuerdo a (1.59) implica que  $n' = n$ . En tal caso, la acción efectiva (1.58) toma la forma:

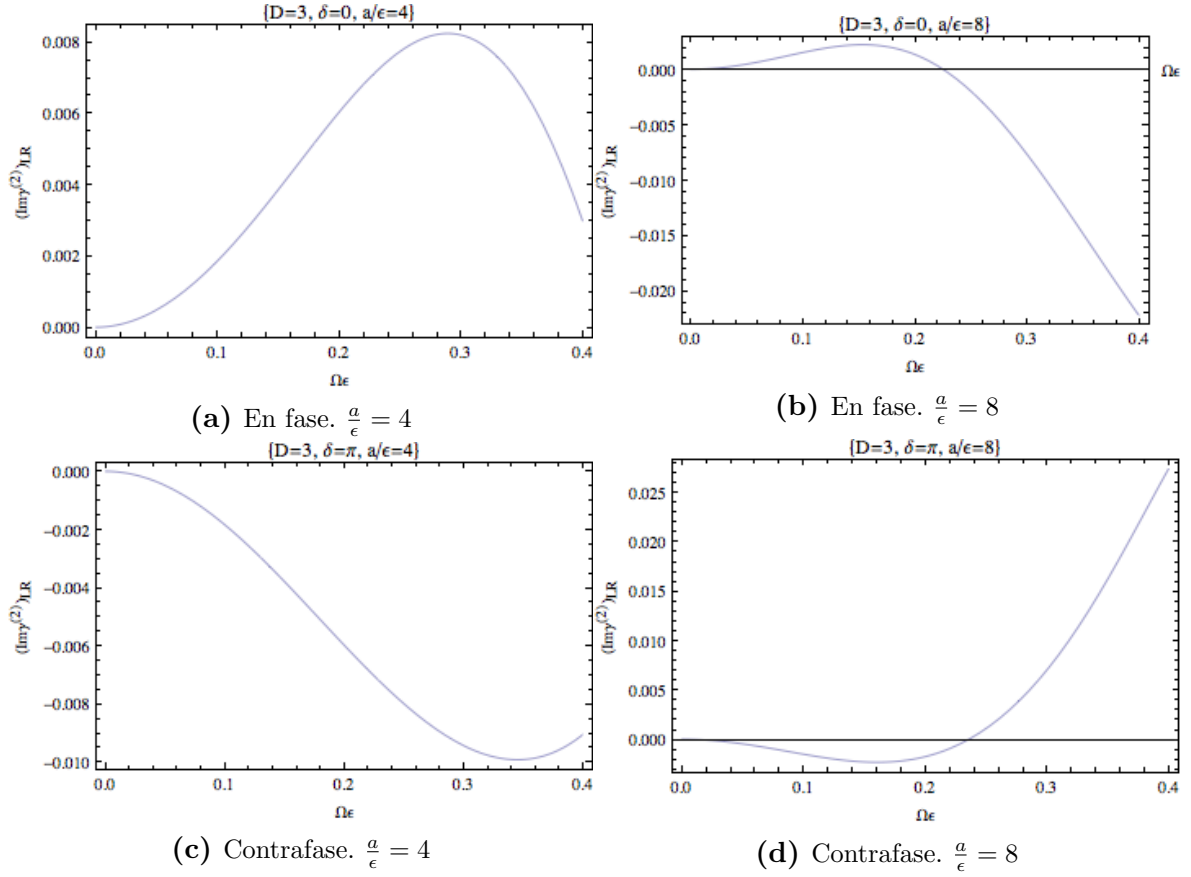
$$\gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \Big|_{k_0=n\Omega, \mathbf{k}_{||}=0} J_n(k_d \epsilon_R) J_n(k_d \epsilon_L) e^{in\delta - ik_d a} . \quad (1.60)$$

Hemos elegido  $\Omega$  la frecuencia de oscilación de los espejos, y  $\delta = \delta_R - \delta_L$  la diferencia de fases entre las mismas, además de usar la normalización respecto al volumen y el tiempo  $\gamma_{LR}^{(2)} = \frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{TL^{d-1}}$ .

Al considerar la paridad del integrando bajo  $n$  y  $k_d$  podemos encontrar que la única contribución a la parte imaginaria de (1.60) estará dada por:

$$\begin{aligned} \text{Im} [\gamma_{LR}^{(2)}] &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \text{Im} [\tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k)] \Big|_{k_0=n\Omega, \mathbf{k}_{||}=0} J_n(k_d \epsilon_L) J_n(k_d \epsilon_R) \\ &\quad \times \cos(n\delta) \cos(k_d a) . \end{aligned} \quad (1.61)$$

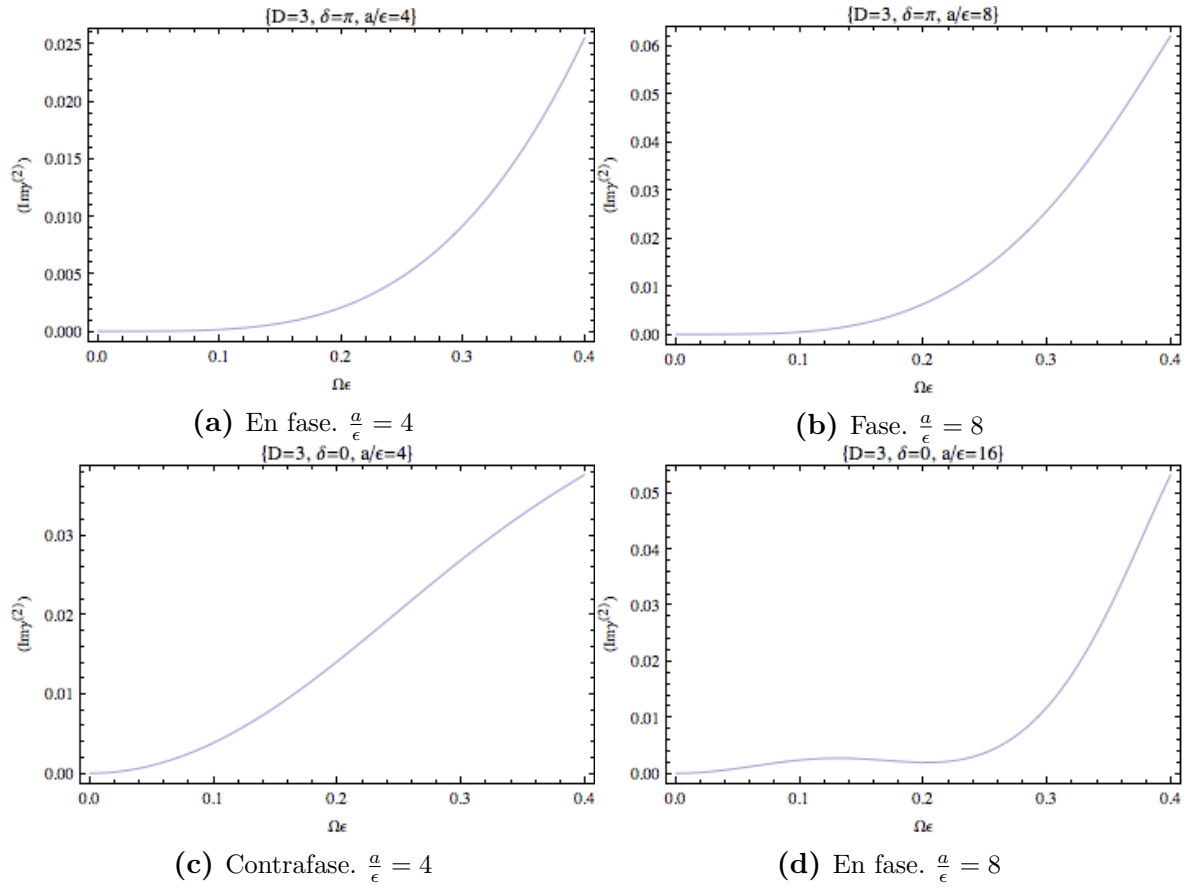
Igual que en el caso de un solo espejo, la parte imaginaria de la acción efectiva está determinada por la parte imaginaria de la contribución del loop de dos puntos. De acuerdo a las expresiones (1.19) y (1.53), salvo constantes, las contribuciones del loop para el caso de un espejo y de dos espejos tienen la misma estructura analítica, por lo tanto podemos adaptar los resultados de la sección 1.1. La figura 1.5 muestra el comportamiento de (1.61) como función del término adimensional  $\Omega\epsilon$ . Nuevamente se observa que la aparición de una parte imaginaria en la acción efectiva está suprimida para valores de  $\Omega\epsilon \rightarrow 0$ . Lo mostrado en estas gráficas parecería contradecir el hecho que el signo de la parte imaginaria de la acción efectiva a cada orden está unívocamente



**Figura 1.5:** Parte imaginaria de la acción efectiva para dos espejos con igual frecuencia y amplitud en  $D = 3$  dimensiones, para diferentes relaciones entre la amplitud de la oscilación  $\epsilon$  y la separación entre los espejos  $a$ . En este caso se han excluido los términos de autointeracción de cada espejo.

determinado por el signo de  $\text{Im} \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k)$ . Sin embargo no debemos olvidar que al inicio de esta sección obviamos los términos de autointeracción de cada uno de los espejos. La inclusión de estos términos dentro del análisis compensan las variaciones de signo, y la parte imaginara de la acción efectiva queda con el signo determinado tal y como se muestra en la figura 1.6. Esto implica que para los regímenes de frecuencia considerados los términos de autointeracción de los espejos son dominantes.





**Figura 1.6:** Parte imaginaria de la acción efectiva para dos espejos con igual frecuencia y amplitud en  $D = 3$  dimensiones, para diferentes relaciones entre la separación  $a$  y la amplitud  $\epsilon$  de la oscilación. Al incluir los términos de autointeracción de los espejos el signo de la acción efectiva está unívocamente determinado.



## Capítulo 2

# Movimiento lateral de las placas: Fricción de Casimir

De acuerdo a lo mencionado en la introducción, cuando las condiciones de borde impuestas sobre el campo corresponden a dos cuerpos que se mueven transversalmente uno respecto al otro, las excitaciones de sus grados de libertad internos debido a las fluctuaciones de vacío produce la aparición de efectos disipativos en el sistema. Esto puede explicarse como una analogía al intercambio de fotones virtuales entre los dos cuerpos, que serían los responsables de producir la excitación. En este capítulo estudiaremos el caso en el que dichos cuerpos corresponden a dos espejos paralelos de espesor cero .

Inicialmente, usaremos resultados del capítulo 1 para estudiar el movimiento relativo de dos placas de espesor cero con irregularidades periódicas en su geometría. El movimiento de las placas puede pensarse entonces como la propagación de una onda, y estableceremos bajo que condiciones la acción efectiva adquiere una parte imaginaria, desarrollando esta al primer orden no trivial en las constantes de acople  $\lambda$ .

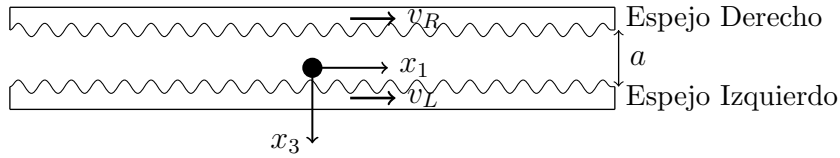
Finalmente simplificaremos la restricción geométrica, y consideraremos espejos planos, que se mueven con una velocidad relativa  $v$ . para este caso, estableceremos un modelo microscópico específico para los espejos suponiendo que se tratan de un conjunto de osciladores armónicos descacoplados. Lo que encontraremos en este caso es que las hasta ahora llamadas constantes de acople dejan de serlo, y pasan a ser funciones de respuesta con dependencia en los momentos, aspecto central en la posibilidad que se desarrolle fricción entre los espejos. El objetivo final es encontrar una expresión no perturbativa para la acción efectiva en términos de estas funciones de respuesta. Para dicho cálculo se aprovechará el hecho que el problema puede reducirse a una dimensión, y la evaluación exacta del determinante asociado a la integral funcional puede llevarse a cabo (es decir sin recurrir a un desarrollo perturbativo) usando el teorema de Gelfand-Yaglom (Ver apendice A).

En ambos casos nos restringiremos a considerar un espacio-tiempo en  $D = 4$  dimensiones.

## 2.1. Espejos con defectos geométricos

Las consideraciones del capítulo 1 para calcular el desarrollo perturbativo en los acoplos entre los grados de libertad internos de los espejos y el campo  $\varphi$  para oscilaciones genéricas de las trayectorias de dichos espejos, puede extenderse al caso de espejos con algunos defectos geométricos, por ejemplo rugosidades. Consideremos el caso entonces de dos espejos separados una distancia promedio  $a$ , con defectos geométricos continuos tal y como se esquematiza en la figura 2.1.

Dado que ambos espejos están en movimiento, cada una de las superficies puede



**Figura 2.1:** Esquema para dos espejos con defectos geométricos continuos

pensarse como una onda caracterizada por una frecuencia  $\Omega_i$  y número de onda  $\kappa_i$  que se propaga en la dirección  $x_1$  con velocidad de fase dada por:

$$v_{L,R} = \frac{\Omega_{L,R}}{\kappa_{L,R}} . \quad (2.1)$$

Por lo tanto, podemos modelar la trayectoria de la superficie a través de funciones oscilatorias análogas a (1.21) con la diferencia que en este caso la amplitud está asociada al defecto geométrico o rugosidad, y no a la amplitud del movimiento del espejo. Es decir, que cada superficie puede definirse como:

$$q_R(x_0, x_1) = A_R \cos(\Omega_R x_0 + \kappa_R x_1 + \delta_R) \quad (2.2)$$

$$q_L(x_0, x_1) = a + A_L \cos(\Omega_L x_0 + \kappa_L x_1 + \delta_L) . \quad (2.3)$$

donde se ha impuesto la condición de uniformidad a lo largo de la coordenada  $x_2$ .

De aquí en adelante el procedimiento es totalmente equivalente al seguido en la sección 1.2.1, y la acción efectiva a orden  $\lambda_L \lambda_R$  estará dada por una expresión similar a (1.51):

$$\Gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{x,y} \int_k \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(x_d - q_R(x_0, x_1)) \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \delta(y_d - q_L(y_0, y_1)) e^{ik(x-y)} , \quad (2.4)$$

donde hemos escrito directamente la función de dos puntos en términos de su transformada de Fourier (1.53).

Es claro que el integrando en (2.4) sólo depende de las coordenadas  $x_2, y_2$  por medio de una exponencial, por lo tanto, la integral sobre estas puede realizarse trivialmente. Definiendo un conjunto de funciones análogas a (1.55), podemos reescribir los productos de  $\delta$  y exponenciales en (2.4) como:

$$\int_x \delta(x_d - q_{L,R}(x_0, x_1)) e^{ikx} \equiv (2\pi) \delta(k_2) \tilde{f}_{L,R}(k_0, k_1, k_d) \quad (2.5)$$

donde ahora las funciones  $\tilde{f}$  se modifican por efectos del movimiento de los espejos a lo largo de la dirección  $x_1$ , tomando la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_L(k_0, k_1, k_d) = \int_{x_0, x_1} e^{i(k_0 x_0 - k_d q_L(x_0, x_1))} &= (2\pi)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \delta(k_0 - n\Omega_L) \delta(k_1 + n\kappa_L) \\ &\times e^{in\delta_L + ik_d a} J_n(k_d A_L) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_R(k_0, k_1, k_d) = \int_{x_0, x_1} e^{i(k_0 x_0 - k_d q_R(x_0, x_1))} &= (2\pi)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \delta(k_0 - n\Omega_R) \delta(k_1 + n\kappa_R) \\ &\times e^{in\delta_R} J_n(k_d A_R) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

resultado al que se llega usando la identidad (1.22), e integrando sobre  $x_0$  y  $x_1$ . Con estas definiciones (2.5) implica que la acción efectiva (2.4) esté dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{LR}^{(2)}}{L} &= \frac{1}{2} \int_{k_0, k_1, k_d} \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} i^{n-n'} \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \Big|_{k_2=0} (2\pi)^4 \delta(k_0 - n'\Omega_L) \delta(k_1 + n'\kappa_L) \\ &\times \delta(k_0 - n\Omega_R) \delta(k_1 + n\kappa_R) J_n(k_d A_R) J_{n'}(k_d A_L) e^{in\delta_R - in'\delta_L - ik_d a} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Al integrar sobre  $k_1$  y  $k_0$  aparece un factor  $TL$ , que completaría la extensividad de la acción efectiva respecto al área de los espejos y el tiempo. En este caso aparece una condición adicional a la de frecuencias conmensurables encontrada en la sección 1.2.1 para que la contribución a este orden sea no nula, y es que los números de onda de las dos placas también deben serlo, es decir:

$$\frac{\Omega_R}{\Omega_L} = \frac{\kappa_R}{\kappa_L} = \frac{n'}{n} \quad (2.9)$$

que de acuerdo a (2.1) significa que solo habrá una contribución a este orden si las magnitudes de las velocidades de los dos espejos son iguales. El caso más simple a considerar de nuevo corresponde al caso en que las frecuencias para los dos espejos son las mismas, en cuyo caso  $n = n'$ , por lo tanto la acción efectiva normalizada por unidad

de área y unidad de tiempo estará dada por:

$$\gamma_{LR}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \Big|_{k_2=0, k_0=n\Omega, k_1=-n\kappa} J_n(k_d A_R) J_n(k_d A_L) e^{in\delta - ik_d a} . \quad (2.10)$$

De acuerdo a (1.53),  $\tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k)$  con la evaluación especificada en (2.10) va a ser una función par en  $n$  y en  $k_d$ , usando las propiedades de las funciones de Bessel, tendremos que al evaluar la parte imaginaria de (2.10) estará dada por una expresión análoga a (1.61), que toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Im}[\gamma_{LR}^{(2)}] = \frac{1}{2} \int_{k_d} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Im} \left[ \tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k) \right]_{k_2=0, k_0=n\Omega, k_1=-n\kappa} J_n(k_d A_R) J_n(k_d A_L) \times \\ \times \cos(n\delta) \cos(k_d a) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

De acuerdo a esto, la parte imaginaria estará condicionada por la frecuencia y el número de onda, y será no nula para cualquier diferencia de fases y amplitud.

Dado que estamos considerando el caso en espacio-tiempo de  $D=4$  dimensiones, la evaluación de  $\tilde{\Pi}_{LR}^{(2)}(k)$  debe incluir la regularización y sustracción realizadas en la sección (1.1.2). Adaptando el resultado (1.40) al caso de (2.11) tendremos que:

$$\text{Im}[\gamma_{LR}^{(2)}] = \frac{\lambda_R \lambda_L}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{|n\kappa|\sqrt{v^2-1}} dk_d J_n(k_d A_R) J_n(k_d A_L) \cos(n\delta) \cos(k_d a) \quad (2.12)$$

donde hemos usado la definición de la velocidad de fase (2.1). Este resultado sugiere que para que se desarrolle una parte imaginaria en este caso de iguales frecuencias para los espejos, la velocidad de fase  $v > 1$ , lo cual puede interpretarse como velocidad superlumínica. Si el sistema está inmerso en un medio donde la velocidad de propagación de la luz es  $v < c$ , este resultado no resultará contradictorio. Este hecho coincide con lo estudiado en [12], en el que se consideró el caso de dos semiespacios en movimiento relativo y se encontró que aparecerá fricción cuando la velocidad relativa entre los espejos supera la velocidad de propagación de la luz en el material, lo cuál puede entenderse como un análogo cuántico de la radiación de Cherenkov clásica.

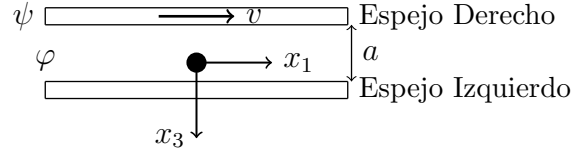
Un análisis más consistente de esto puede hacerse siguiendo la secuencia lógica que se adoptará en la sección 2.2, en la que se considera una transformación de coordenadas entre los dos espejos y considerar un sistema de referencia de una placa en reposo y la otra en movimiento con una velocidad  $v$ , pero la condición sobre la velocidad va a ser la misma que la que hemos establecido en esta sección: solo aparecerá una parte imaginaria en la acción efectiva si esta velocidad es superior a la velocidad de propagación de la luz en el material.

## 2.2. Espejos planos

Consideremos ahora que los espejos son totalmente planos y no existe ningún defecto en su superficie. Para simplificar algunos cálculos, en adelante utilizaremos la convención de tiempo imaginario cambiando  $x_0 \rightarrow ix_0$ , y solo revertiremos esta condición cuando sea necesario estudiar la estructura analítica de algunos resultados. Además restringiremos nuestro análisis al caso de un capo escalar no masivo.

### 2.2.1. Modelo microscópico

El sistema que se busca estudiar corresponde a dos espejos paralelos, separados una distancia  $a$ , como los que se muestran en la figura 2.2. El contenido de campos de la



**Figura 2.2:** Esquema del modelo analizado

teoría corresponde a un campo escalar que modela los grados de libertad internos de los espejos ( $\psi$ ), y un campo escalar de fondo ( $\varphi$ ), cuyas fluctuaciones de vacío serán consideradas. A partir de eso, se puede construir una acción que describa el sistema de la forma:

$$S[\varphi, \psi] = S_v^{(0)}[\varphi] + S_m^{(0)}[\psi] + S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi] \quad (2.13)$$

donde  $S_v^{(0)}[\varphi]$  corresponde a la acción libre del campo escalar  $\varphi$ , mientras  $S_m^{(0)}[\psi]$ ,  $S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi]$  corresponden a la acción libre de los campos de materia asociados a los espejos y un término de interacción entre los campos  $\psi$  y  $\varphi$  respectivamente.

Dado que los campos  $\psi$  estarían “confinados”, tienen soporte solamente en la región en la que están presente las condiciones de borde. El modelo microscópico considerado en [20], sugiere que los grados de libertad microscópicos sean tratados como un conjunto de osciladores armónicos desacoplados, y que la interacción sea lineal en ambos campos. Con estas consideraciones, los términos en la acción (2.13) quedan determinados como:

$$S_v^{(0)}[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \varphi(x))^2] \quad (2.14)$$

$$S_m^{(0)}[\psi] = \frac{1}{2} \int d^4x \chi_{L,R}(x_3) [\dot{\psi}(x_{||})^2 + \Omega_{L,R}^2 \psi(x_{||})^2] \quad (2.15)$$

$$S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi] = ig_{L,R} \int d^4x \psi(x_{||}) \chi_{L,R}(x_3) \varphi(x). \quad (2.16)$$

donde  $g_{L,R}$  y  $\Omega_{L,R}$  son constante positivas que pueden pensarse como el acople entre los grados de libertad de los espejos y el campo  $\varphi$  y la frecuencia natural de cada uno de los osciladores respectivamente. En estas definiciones los subíndices  $L$ ,  $R$  hacen referencia a cada condición de borde ( $L$  para el espejo izquierdo,  $R$  para el espejo derecho), y  $x_{||} \equiv (x_0, x_1, x_2)$ . La distribución  $\chi(x_3)$  dará cuenta de la configuración de los espejos, por ejemplo corresponderá a una  $\delta(x_3)$  para espejos de espesor cero o a funciones de Heaviside en el caso de semiespacios.

Podemos entonces definir la acción efectiva a partir de la integral funcional :

$$\mathcal{Z} = e^{-\Gamma} = \int D\varphi D\psi e^{-S_v^{(0)}[\varphi] - S_m^{(0)}[\psi] - S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi]}. \quad (2.17)$$

Estudiaremos entonces la integración sucesiva sobre los campos a modo de evaluar (2.17) .

### 2.2.2. Integración de los grados de libertad de los espejos

En está sección se describe la integración de los campos de materia asociados a los espejos. La importancia de esto principalmente es que permite reducir el número de grados de libertad de la teoría (al final de este paso, dependería solamente de los campos  $\varphi$ ), redefiniendo la acción (2.13), a una acción modificada que contendrá un término de interacción cuadrático en  $\varphi$ .

Supongamos por simplicidad el caso de un único espejo<sup>1</sup>, y la extensión a dos espejos será inmediata imponiendo la condición de movimiento relativo entre ellos. Esta integral funcional sobre  $\psi$  implica para (2.17):

$$\int D\psi e^{-S_m^{(0)}[\psi] - S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi]} = e^{-S_I[\varphi]} \quad (2.18)$$

donde ahora la interacción entre los espejos y el campo escalar de fondo dependerá solamente de  $\varphi$ . A partir de las definiciones (2.15) y (2.16), la integral funcional (2.18) puede llevarse a una forma cuadrática en  $\psi$ , al expandir alrededor de la solución de la ecuación de movimiento para  $\psi$ . Es decir redefinimos:

$$\psi'(x) = \psi(x) - g\varphi(x) \int_y \mathcal{K}(x, y) \quad (2.19)$$

por lo tanto la suma de los términos (2.15) y (2.16) en términos de esta redefinición estará dada por:

$$S_m^{(0)}[\psi'] + S_{vm}^{(I)}[\varphi, \psi'] = \frac{1}{2} \int_{x, x'} [\psi'(x) D(x, x') \psi'(x') + g^2 \varphi(x) \mathcal{K}(x, x') \varphi(x')] . \quad (2.20)$$

---

<sup>1</sup>Por lo tanto omitiremos en esta sección los subíndices que hacen referencia a cada espejo



La redefinición (2.19), tiene asociado un jacobiano igual a 1, por lo tanto la medida de integración en la integral funcional no cambia. En cuyo caso la integral puede evaluarse de forma exacta en función del determinante del operador que define la forma cuadrática [19]:

$$\int D\psi' e^{-S_m^{(0)}[\psi'] - S_m^{(I)}[\varphi, \psi']} = \det(D)^{-\frac{1}{2}} e^{\int_{x,x'} \varphi(x) \mathcal{K}(x,x') \chi(x_3) \varphi(x')} \quad (2.21)$$

donde el kernel

$$g^2 \mathcal{K}(x, x') = \int_k \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{g^2}{k_0^2 + \Omega^2} e^{ik(x-x')} \quad (2.22)$$

corresponde a la función de Green del operador.  $D(x, x') = \delta^4(x - x')[-\partial_{x_0}^2 + \Omega^2]$ . El factor del determinante del operador  $D$  podrá ser factorizado cuando se estén realizando los cálculos asociados a la energía de vacío y por lo tanto puede obviarse. En cuyo caso comparando (2.18) y (2.21) podemos definir:

$$S_I[\varphi] = \frac{g^2}{2} \int_{x,x'} \varphi(x) \mathcal{K}(x, x') \chi(x_3) \varphi(x') \quad . \quad (2.23)$$

Este término de interacción puede ser reescrito definiendo una función que da información sobre la respuesta de los grados de libertad de los espejos:

$$S_I[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,x'} \varphi(x) \delta(x_3 - x'_3) \chi(x_3) \lambda(x_{||} - x'_{||}) \varphi(x') \quad (2.24)$$

donde la función de respuesta estará determinada por:

$$\lambda(x_{||} - x'_{||}) = \int_{k_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g^2}{k_0^2 + \Omega^2} e^{ik_{||}(x_{||} - x'_{||})} \quad (2.25)$$

para  $k_{||}$  definido de manera análoga a  $x_{||}$ . Ésta expresión sugiere que al revertir la rotación de Wick, pueden aparecer no analiticidades generadas por polos cuando  $k_0 = \Omega$ , a las cuales se asocia el hecho, como se verá más adelante, de que aparezca una parte imaginaria en la acción efectiva lo cual es una señal de la excitación de los grados de libertad microscópicos de los espejos.

### 2.2.3. Extensión al caso de dos espejos

Consideremos ahora que los dos espejos están descriptos a través de la acción (2.15), y sean  $\psi_L$  y  $\psi_R$  los campos que describen los grados de libertad internos de los espejos izquierdo y derecho respectivamente. Estos campos en principio son independientes, por lo tanto un procedimiento análogo al del caso de un espejo puede llevarse a cabo. En cuyo caso, después de la integración de los campos  $\psi_R$  y  $\psi_L$  el término de interacción tomará la forma:

$$S_I[\varphi] = S_I^{(L)}[\varphi] + S_I^{(R)}[\varphi] \quad (2.26)$$

donde de nuevo los superíndices  $L$  y  $R$  hacen referencia a cada espejo. De acuerdo a (2.24), cada espejo estará caracterizado por su función de respuesta  $\lambda(x_{\parallel} - x'_{\parallel})$  y tendrá una distribución  $\chi(x_3)$  específica de acuerdo a su configuración. Esto es simplemente que:

$$S_I^{(L,R)}[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,x'} \varphi(x) V_{L,R}(x, x') \varphi(x') \quad (2.27)$$

donde cada potencial estará definido a partir de (2.24) como:

$$V_{L,R}(x, x') = \delta_{L,R}(x_3 - x'_3) \chi_{L,R}(x_3) \lambda_{L,R}(x_{\parallel} - x'_{\parallel}) \quad (2.28)$$

y  $\lambda_{L,R}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})$  estará descrito de acuerdo a los valores de  $g$  y  $\Omega$  para cada espejo. Consideremos entonces que los dos espejos están en movimiento relativo. Para escribir explícitamente las funciones de respuesta  $\lambda(x_{\parallel} - x'_{\parallel})$  conviene realizar una discusión previa. Dado que los espejos están en movimiento relativo, tanto los campos como las cantidades que intervienen en los términos de interacción estarán descritas por sistemas de coordenadas diferentes para cada uno de los espejos, pero relacionadas a través de una transformación de Galileo dado el régimen de velocidad presente en el problema.

Definamos  $x$  como las coordenadas asociadas a la placa de la derecha, e  $y$  las coordenadas asociadas a la placa de la izquierda. De acuerdo al esquema mostrado en la figura 2.1, la transformación de coordenadas para este caso estará dada por:

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ x_0 &= y_0 \\ x_1 &= y_1 - vy_0 . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Es claro que el campo escalar resulta invariante ante este conjunto de transformaciones, y además los resultados obtenidos hasta el momento permiten establecer que la única diferencia entre el potencial asociado a cada placa estará en la función de respuesta  $\lambda$  ya que es el único término que depende de la coordenada a lo largo de la cual se produce el movimiento relativo. A partir de (2.25) podemos encontrar la transformada de Fourier para las funciones de respuesta de cada uno de los espejos:

$$\tilde{\lambda}_R(k_{\parallel}) = \frac{g_R^2}{k_0^2 + \Omega_R^2} , \quad (2.30)$$

para la placa derecha, mientras que para la placa izquierda:

$$\tilde{\lambda}_L(k_{\parallel}) = \frac{g_L^2}{(k_0 + vk_1)^2 + \Omega_L^2} , \quad (2.31)$$

donde en este último paso se han implementado el conjunto de transformaciones (2.29) en la expresión (2.25), y se ha redefinido  $k_0 \rightarrow k_0 + vk_1$ . Claramente estas expresiones muestran que dichas transformadas no dependen de todas las componentes en el espacio de momentos, y lo más importante que son independientes de la componente de momento  $k_3$  asociada a la dirección perpendicular a los dos espejos. Con esto, la acción que depende solamente del campo  $\varphi$ :

$$S[\varphi] = S_v^{(0)}[\varphi] + S_I[\varphi] . \quad (2.32)$$

Además de eso, al ser esta nueva interacción cuadrática en los campos, y dado que la parte asociada a la acción libre también lo es, hemos encontrado una forma cuadrática que en principio permite que la integral funcional sobre los campos  $\varphi$  pueda realizarse. Sin embargo, la evaluación del determinante no siempre es posible, ya que no necesariamente conocer el conjunto de autovalores del operador que genera la forma cuadrática es una tarea realizable. Para este efecto, se lleva a cabo un paso adicional, que se abordará en la siguiente sección. Reescribiendo los campos en términos de la transformada de Fourier asociada a las componentes  $x_{||}$ :

$$\varphi(x) = \int_{k_{||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(k_{||}, x_3) \quad (2.33)$$

la acción (2.32) tomará la forma

$$\begin{aligned} S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{k_{||}, x_3} \tilde{\varphi}(k_{||}, x_3) [ -\partial_{x_3}^2 + k_{||}^2 + \chi_R(x_3 - a) \tilde{\lambda}_R(k_0) + \\ + \chi_L(x_3) \tilde{\lambda}_L(k_0 + vk_1) ] \tilde{\varphi}(-k_{||}, x_3) \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde hemos hecho una redefinición sobre las transformadas de las funciones de respuesta, haciendo explícito que no dependen de todas las componentes de  $k_{||}$  de acuerdo a lo obtenido en (2.30) y (2.31).

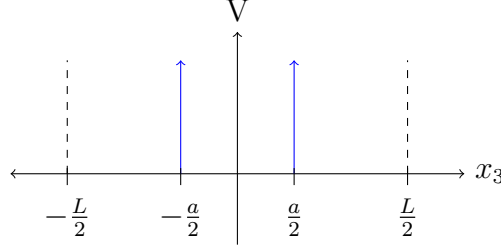
Este resultado muestra que el operador que establece la forma cuadrática sobre  $\varphi$ , puede reducirse a un operador unidimensional, y por lo tanto la evaluación de su determinante hacerse de manera exacta como lo describimos en el apéndice A.

## 2.3. Acción efectiva para espejos planos

### 2.3.1. Evaluación Exacta

Como vimos en la sección anterior, podemos imponer condiciones específicas en la configuración del modelo a través de las distribuciones  $\chi_{L,R}(x_3)$ . Consideremos entonces

que las dos superficies corresponden a espejos de espesor cero, separados una distancia  $a$ . en cuyo caso, para los dos espejos  $\chi_R(x_3) = \chi_L(x_3) = \delta(x_3)$ . Una representación del potencial asociado a dos espejos de este tipo se muestra en la figura 2.3.



**Figura 2.3:** Distribución del potencial para dos espejos de espesor 0.

Por simplicidad, supondremos que los espejos están ubicados simétricamente respecto a un origen de coordenadas. Además, consideraremos que el sistema de espejos está dentro de una caja de volumen  $L_{\parallel}^2 L$  siendo  $L_{\parallel}$  la dimensión en las direcciones  $x_1, x_2$ , y  $L$  la dimensión correspondiente a la dirección  $x_3$ . El objetivo de esto es restringir el cálculo de la energía de vacío por unidad de área en esta caja, imponer condiciones de Dirichlet sobre cada una de las caras de esta caja, y en el paso final tomar el límite de  $L, L_{\parallel}$  yendo a infinito para hacer el resultado independiente del volumen.

Dado que nuestro interés está en evaluar la respuesta de los dos espejos debido a su interacción, construimos la acción efectiva a partir del resultado (2.32), obtenido al integrar los grados de libertad internos de los espejos:

$$\Gamma_I = -\log\left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0}\right) \quad (2.35)$$

donde  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{Z}_0$  están determinadas de acuerdo a (2.17) como:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_v^{(0)}[\varphi] - S_I[\varphi]} \quad ; \quad \mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_v^{(0)}[\varphi]} \equiv \mathcal{Z} \Big|_{S_I[\varphi]=0}. \quad (2.36)$$

Como lo mencionamos en la sección anterior, la importancia de haber integrado los campos de materia asociados a los grados de libertad internos de los espejos radica en que la nueva acción de interacción es cuadrática en el campo escalar  $\varphi$ , que permite escribir la acción total del sistema como la forma cuadrática (2.34). Además, la transformación en espacio de momentos sobre las componentes  $k_{\parallel}$  permitió reducir el operador que define la forma cuadrática a un operador unidimensional. Definamos este como  $\tilde{\mathcal{T}}_{k_{\parallel}}(x_3, x'_3)$ , que para la configuración del potencial mostrado en la figura 2.3

estará dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}}(x_3, x'_3) = & \delta(x_3 - x'_3)[-\partial_{x_3}^2 + m^2 + k_{||}^2 + \delta\left(x_3 - \frac{a}{2}\right) \tilde{\lambda}_R(k_0) + \\ & + \delta\left(x_3 + \frac{a}{2}\right) \tilde{\lambda}_L(k_0 + vk_1)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

a partir del cual podemos calcular las integrales funcionales (2.38) como una función de su determinante. Usando resultados de integrales funcionales gaussianas (como los mostrados en [19]), tendremos que :

$$\mathcal{Z}(k_{||}) = \left(\det \tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \mathcal{Z}_0(k_{||}) = \left(\det \tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}} \Big|_{\tilde{\lambda}_R, \tilde{\lambda}_L=0}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv \det \left(\tilde{\mathcal{T}}_0\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.38)$$

donde hemos establecido que el término de interacción será cero si las funciones de respuesta  $\tilde{\lambda}_{R,L} = 0$ . Con estas consideraciones, la acción efectiva se calcula a partir de los determinantes (2.38). Teniendo en cuenta la definición (2.37), el operador es una función de las componentes del momento  $k_{||}$ . Por lo mencionado en el inicio de esta sección, nos interesa ver el límite de  $L_{||} \rightarrow \infty$ , por lo que en este límite las componentes  $k_{||}$  toman valores continuos y no acotados de acuerdo a las condiciones de borde que se busca imponer. Por lo tanto para obtener la acción efectiva para todo valor de  $k_{||}$  es necesario integrar sobre estas componentes. Es decir que la acción efectiva tomará la forma:

$$\Gamma_I = \frac{\Sigma T}{2} \int_{k_{||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \log \left( \frac{\det \tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}}}{\det \tilde{\mathcal{T}}_0} \right) \quad (2.39)$$

donde hemos introducido el factor  $\Sigma T$  que da cuenta de la extensividad de la acción efectiva respecto al área de las placas  $\Sigma \equiv L_{||}^2$  y respecto al intervalo temporal  $T$ . Como hemos mencionado, el cálculo de estos determinantes puede hacerse de manera explícita si se conoce el espectro del operador asociado. Sin embargo, resolver el problema de autovalores puede no ser posible, dadas las características de los términos de interacción que estamos considerando. Por lo tanto el enfoque que vamos a asumir para evaluar (2.39) va a ser diferente, y se describe en el apéndice A. Consideremos que  $u(x_3)$  y  $u_0(x_3)$  son soluciones de las ecuaciones homogéneas:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}} u(x_3) = 0 \quad ; \quad \tilde{\mathcal{T}}_0 u_0(x_3) = 0 \quad (2.40)$$

con condiciones de borde de Dirichlet idénticas para  $u(x_3)$  y  $u_0(x_3)$ :

$$u\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad ; \quad u'\left(-\frac{L}{2}\right) = 1. \quad (2.41)$$

donde  $u'(x_3) \equiv \frac{du}{dx_3}$ . Aplicando el teorema de Gel'fand-Yaglom [21] al caso del intervalo finito  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , podemos calcular la relación entre los determinantes en (2.39) como:

$$\frac{\det \tilde{\mathcal{T}}_{k_{||}}}{\det \tilde{\mathcal{T}}_{0 k_{||}}} = \frac{u\left(\frac{L}{2}\right)}{u_0\left(\frac{L}{2}\right)}. \quad (2.42)$$

Por lo tanto, la acción efectiva, normalizada respecto al área de las placas y el intervalo de tiempo, estará dada por:

$$\frac{\Gamma}{\Sigma T} \equiv \gamma = \frac{1}{2} \int_{k_{||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{u\left(\frac{L}{2}\right)}{u_0\left(\frac{L}{2}\right)} \right]. \quad (2.43)$$

La acción efectiva (2.43) contiene información de todo el sistema, incluso términos relacionados con la auto interacción de cada espejo. Dado que estamos interesados en evaluar la respuesta del sistema de los dos espejos debido a su movimiento relativo, vamos a omitir estos términos de autointeracción. Una forma de hacer esto, es en lugar de calcular (2.43), calcular su derivada respecto  $a$ , ya que este sería el único parámetro que relaciona los dos espejos. De acuerdo a la definición (2.37), la única dependencia respecto  $a$  está incluida en el término de interacción por lo tanto,  $u_0(x_3)$  es independiente de  $a$  y puede ser omitido de todo el análisis. Por lo tanto, con estas consideraciones, al derivar (2.43) respecto de  $a$  tendremos:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial a} = \frac{1}{2} \int_{k_{||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial a} \log \left[ u\left(\frac{L}{2}\right) \right]. \quad (2.44)$$

De acuerdo a esto, ahora el problema se ha reducido a determinar la solución  $u(x_3)$ , evaluada en el punto  $x_3 = \frac{L}{2}$ . Dado que conocemos por la condición de borde la solución en  $x_3 = -\frac{L}{2}$ , podemos plantear una base de soluciones para escribir  $u(x_3)$  y su derivada  $u'(x_3)$ , y usando las condiciones de continuidad de la solución  $u(x_3)$  en el intervalo  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , podemos evaluar  $u\left(\frac{L}{2}\right)$ . Los detalles del cálculo para el caso de potenciales tipo  $\delta(x_3)$  se muestra en la sección A.1. El resultado después de seguir los pasos mencionados, y tomar el límite de  $L \rightarrow \infty$  es:

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{k_{e||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \log \left[ 1 - \frac{\tilde{\lambda}_L(k_0 + vk_1) \tilde{\lambda}_R(k_0)}{\left(2|k_{||}|_e + \tilde{\lambda}_R(k_0)\right) \left(2|k_{||}|_e + \tilde{\lambda}_L(k_0 + vK_1)\right)} e^{-2a|k_{||}|_e} \right], \quad (2.45)$$

donde se deja explícito que estamos considerando la formulación en tiempo imaginario y por lo tanto  $|k_{||}|_e = \sqrt{k_0^2 + k_1^2 + k_2^2}$ . Un aspecto que cabe notar de esta expresión, es que los términos de autointeracción de los espejos fueron suprimidos, ya que no hay dependencia explícita de factores que involucren solo a una de las funciones de

respuesta  $\tilde{\lambda}_{L,R}$ .

Claramente este es un resultado no perturbativo, que se cumple a todo orden en las funciones de respuesta, el cual muestra que la acción efectiva es una función de la velocidad relativa entre las placas. Una consecuencia de esto es que la fuerza de Casimir estática depende de la velocidad. Si derivamos respecto al parámetro de separación tendremos:

$$\mathcal{F}(a, v) \equiv -\frac{\partial \gamma}{\partial a} = -\frac{1}{2} \int_{k_{e||}} \frac{2e^{-2a|k_{||}|_e} \lambda_R(k_0) \lambda_L(k_0 + vk_1)}{(2|k_{||}|_e + \lambda_R(k_0)) \left(1 - \frac{e^{-2a|k_{||}|_e} \lambda_R(k_0) \lambda_L(k_0 + vk_1)}{(2|k_{||}|_e + \lambda_R(k_0))^2}\right)} \quad (2.46)$$

donde claramente esta dependencia es incluida debido al modelo microscópico elegido para los grados de libertad de los espejos.

Podemos también revertir la rotación de Wick y volver a la formulación en tiempo real. Para esto hacemos el cambio  $p_0 \rightarrow ip_0$  lo cual genera que las funciones de respuesta (2.30) y (2.31) tomen la siguiente forma:

$$\tilde{\lambda}_R(k_0) = \frac{g_R^2}{k_0^2 - \Omega_R^2 + i\eta} \quad , \quad \tilde{\lambda}_L(k_0 - vk_1) = \frac{g_L^2}{(k_0 - vk_1)^2 - \Omega_L^2 + i\eta} \quad (2.47)$$

y que la acción efectiva (2.45) esté dada por:

$$\gamma = \frac{i}{2} \int_{k_{e||}} \frac{1}{(2\pi)^3} \log \left[ 1 - \frac{\tilde{\lambda}_L(k_0 - vk_1) \tilde{\lambda}_R(k_0)}{(2i|k_{||}| + \tilde{\lambda}_R(k_0)) (2i|k_{||}| + \tilde{\lambda}_L(k_0 - vk_1))} e^{i2a|k_{||}|} \right] \quad (2.48)$$

donde  $|k_{||}| = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - k_2^2}$ . Con las consideraciones de espejos semitransparentes, podemos ahora evaluar orden a orden en el desarrollo perturbativo. Nos restringiremos al orden más bajo no trivial, para hacer algunos comentarios sobre el comportamiento analítico a este orden.

### 2.3.2. Evaluación perturbativa al orden más bajo no trivial

Veamos ahora que condición debe verificarse para que la acción efectiva (2.48) desarrolle una parte imaginaria al orden más bajo no trivial, el cual estará dado a partir del desarrollo perturbativo en las funciones de respuesta como:

$$\gamma_I^{(2)} = \frac{i}{64\pi^3} \int_{k_{||}} \frac{\tilde{\lambda}_L(k_0 - vk_1) \tilde{\lambda}_R(k_0)}{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta} e^{i2a\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta}} \quad (2.49)$$

Hemos usado la  $\mathbf{k}_{||} = (k_1, k_2)$  como notación las componentes de los impulsos paralelas a las superficies de los espejos, y se asumió la prescripción de polos de Feynman. Los factores  $i\eta$  se han incluido en el exponente para fines comparativos con resultados de

trabajos anteriores.

Salvo constantes, (2.49) coincide con el orden más bajo no trivial estudiado en [22], a partir de un desarrollo perturbativo de la acción efectiva (2.17). Por lo tanto el resultado del trabajo citado y el obtenido a partir de (2.48) tienen la misma estructura analítica y realizaremos un análisis similar al hecho en esta referencia para argumentar porque es condición necesaria que haya una dependencia no trivial de las funciones de respuesta respecto a los impulsos para que la parte imaginaria de la acción efectiva sea no nula.

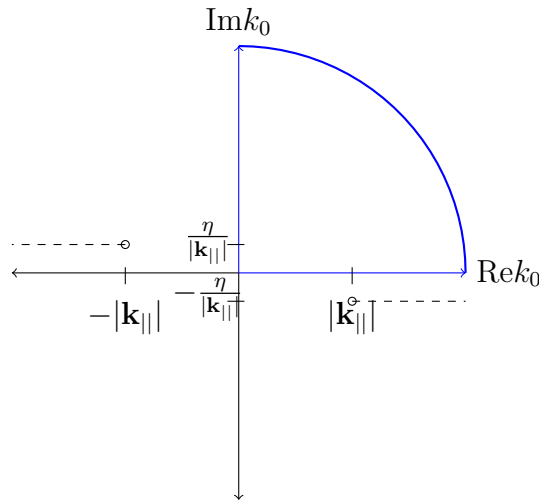
Supongamos entonces que las funciones de respuesta fuesen constantes, es decir  $\lambda_{L,R}(k_0) = \omega_k^2$ . En este caso de acuerdo a (2.49), el integrando es una función par respecto a  $k_0$  y la acción efectiva estará determinada por:

$$\begin{aligned}\gamma_I^{(2)} &= \frac{i}{32\pi^3} \int_{\mathbf{k}_{||}} \int_0^{+\infty} dk_0 \frac{\omega_k^4}{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta} e^{i2a\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta}} \\ &\equiv \frac{i}{32\pi^3} \int_{\mathbf{k}_{||}} \int_0^{+\infty} dk_0 f(k_0)\end{aligned}\quad (2.50)$$

donde hemos definido la función  $f(k_0) = \frac{\omega_k^4}{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta} e^{i2a\sqrt{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta}}$ . A partir del factor  $\frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}_{||}^2 + i\eta}$ , podemos determinar que los polos de esta función están ubicados en<sup>2</sup>:

$$k_0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}_{||}^2 - i\eta} \approx \pm \left( |\mathbf{k}_{||}| - i \frac{\eta}{2|\mathbf{k}_{||}|} \right). \quad (2.51)$$

Además de esto, dado que el argumento de la exponencial aparece una raíz, esto genera que aparezcan cortes en la función si  $k_0 = \text{Re}[k_0] \pm i\eta$ , para  $|\text{Re}[k_0]| > |\mathbf{k}_{||}|$ . Estas condiciones se muestran en la figura 2.4.



**Figura 2.4:** Polos y ramas de corte (líneas punteadas) de la función  $f(k_0)$

<sup>2</sup>Haremos explícito que  $\eta$  es parámetro para la prescripción de polos y por lo tanto  $\eta \ll 1$



Podemos elegir el contorno mostrado para calcular la integral sobre  $k_0$ , donde tomaremos el radio del arco tendiendo a infinito. En este caso dada la definición de  $k_0$  la contribución a la integral de la semicircunferencia es nula, y por lo tanto tendremos:

$$\int_0^{+\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_0^{+\infty} f(ik_0) + 2i\pi \sum \text{Res} f(k_0) \quad (2.52)$$

donde hemos hecho explícito que la integral a lo largo del semieje imaginario positivo se obtiene al hacer una rotación de Wick que cambia  $k_0 \rightarrow ik_0$ . Dado que el contorno elegido no encierra polos de la función, la contribución de los residuos es cero. Por lo tanto, en este caso de funciones de respuesta constante, tendremos que la acción efectiva al orden más bajo no trivial está dada por:

$$\gamma_I^{(2)} = -\frac{1}{32\pi^3} \int_{\mathbf{k}_{||}} \int_0^{+\infty} dk_0 f(ik_0) . \quad (2.53)$$

De acuerdo a la definición que hemos hecho de  $f(k_0)$ , evaluarla en un argumento puramente imaginario hace que la función sea real (ya no sería necesario incluir el factor de prescripción de polos). Al ser  $f(ik_0)$  real, la ecuación (2.53) permite concluir que para el orden no trivial más bajo y funciones de respuesta constantes, la acción efectiva no desarrolla una parte imaginaria. Lo cual es un comportamiento de esperar, ya que de acuerdo a (2.47) la única información del movimiento relativo de las placas en este caso de espejos planos está incluido en las funciones de respuesta de los espejos a través de su dependencia con la velocidad. Así que la consideración de funciones de respuesta constantes estaría eliminando las condiciones para que aparezca algún indicio de fenómenos disipativos en el sistema.



# Conclusiones

Hemos calculado, usando métodos de integrales funcionales, la acción efectiva para un campo escalar real en casos en los que las condiciones de borde impuestas al campo corresponden a espejos semitransparentes que están en movimiento.

Inicialmente consideramos un movimiento oscilatorio para el caso de 1 y 2 espejos planos, para los cuales calculamos la acción efectiva, a diferentes ordenes en las constantes de acople. Para esto usamos el desarrollo en cumulantes en la formulación de tiempo real (Espacio de Minkowski) en espacio-tiempo de  $D$  dimensiones. A partir de este resultado, restringimos nuestro análisis de la parte imaginaria de dicha acción efectiva para condiciones específicas, encontrando que esta será unívocamente determinada por la parte imaginaria asociada a la contribución del loop escalar que resulta a cada orden. Para un solo espejo, en el caso masivo en  $D = 2$  comprobamos que la acción efectiva a segundo orden en los acoples, desarrollará una parte imaginaria si se supera la condición usual para la producción de pares por la acción de un campo externo. Los casos no masivos en  $D = 3$  y  $D = 4$  permitieron establecer que habrá indicios de fenómenos disipativos si la componente del impulso en la dirección que se produce la oscilación está acotada por un múltiplo entero de la frecuencia con la que oscila el espejo.

En el caso de dos espejos encontramos que solo aparecerá parte imaginaria si las frecuencias de oscilación de los espejos son conmensurables. Analizamos el caso más simple de frecuencias iguales, y pudimos notar que si suprimimos los términos de autointeracción de cada espejo el signo de la parte imaginaria de la acción efectiva no estaría unívocamente definido por el signo de la parte imaginaria de la contribución del loop. Al incluir las autointeracciones se remedia esto, lo que implica que estos términos de autointeracción son dominantes al orden cuadrático estudiado.

Partiendo de los resultados para el movimiento normal oscilatorio en un espacio-tiempo en  $D = 4$  dimensiones, consideramos que los espejos estaban en movimiento lateral. Se incluyeron defectos geométricos continuos que podrían modelar rugosidades, y se encontró que en este caso la velocidad de fase de una de las placas (modelada como una onda que se propaga) debe ser superior a la velocidad de fase de la luz en el material de los espejos (si se supone un medio material). Este fenómeno puede pensarse como un análogo cuántico de la radiación de Cherenkov de acuerdo a lo propuesto en la referencia [12], y es una implicación de que no se estén considerando medios dispersivos al

imponer desde un inicio que las funciones de respuesta de los espejos son constantes. Por último, se consideró dos espejos planos en movimiento relativo con velocidad no relativista. En este caso, en la formulación de tiempo imaginario, encontramos la acción efectiva para el sistema de un campo escalar con condiciones de borde implementadas por espejos cuyo modelo microscópico corresponde a un conjunto de osciladores armónicos no acoplados. Se encontró que al integrar los grados de libertad que describen los osciladores en los espejos, la acción efectiva queda determinada a partir de la acción libre del campo escalar y una interacción cuadrática en el campo con los espejos. En este caso, dicha interacción está definida por medio de funciones de respuesta que dependen de las coordenadas paralelas a las superficie de los espejos y del tiempo. Usando transformadas de Fourier, el problema se redujo a un problema unidimensional. Pudimos, utilizando el Teorema de Gelfand-Yaglom evaluar la acción efectiva de manera exacta y obtener un resultado no perturbativo. Este resultado fue comprobado al orden más bajo no trivial, y es consistente con lo hecho en anteriores trabajos [22]. Se comprobó a este orden que la acción efectiva desarrollará una parte imaginaria para medios dispersivos para cualquier régimen de velocidades, incluso velocidades no relativistas como las consideradas en este caso.

# Apéndice A

## Teorema de Gelfand-Yaglom

*“I’ve had a perfectly wonderful evening. But this wasn’t it.”*  
— Groucho Marx

Usaremos el teorema enunciano de acuerdo [23] para operadores de Schrödinger en una dimensión. Consideremos el operador  $\mathcal{M} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  definido en el intervalo  $[0, 1]$ . El problema con condiciones de borde de Dirichlet:

$$\mathcal{M}\phi_n = \lambda_n\phi_n(x), \quad \phi_n(0) = \phi_n(1) = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde  $\lambda_n$  son un conjunto discreto de autovalores no degenerados acotado por abajo. La solución de este problema es equivalente a la solución de:

$$\mathcal{M}u_n = \lambda_n u_n(x), \quad u_n(0) = 0, \quad u'_n(0) = 1 \quad (\text{A.2})$$

Se cumple para el operador  $\mathcal{M}$  que:

$$\frac{\det \mathcal{M}}{\det \mathcal{M}_{free}} = \frac{u_{\lambda=0}(1)}{u_{\lambda=0}^{free}(1)} \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathcal{M}_{free}$  y  $u^{free}$  son el operador y la solución para el caso libre, con  $V(x) = 0$ .

### A.1. Aplicación a potenciales tipo $\delta$

Para efectos de esta sección consideraremos  $x_3 \equiv x$ . Para la aplicación al caso del operador (2.37), seguimos lo mostrado en [24]. En este trabajo, construyen matrices de transferencia de la solución y sus derivadas las cuales permiten conocer a partir de la solución y su derivada en un punto  $x_i$ , la solución en un punto  $x_f$ . Para esto, definimos

el vector de dos componentes:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ \frac{u'(x)}{|k_{||}|} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

donde la división entre  $|k_{||}|$  se realiza para que las dos componentes tengan la misma dimensión. Por lo tanto, dado que conocemos la solución en  $x = -\frac{L}{2}$ , la solución en  $x = \frac{L}{2}$  puede encontrarse como:

$$\Psi\left(\frac{L}{2}\right) = A\left(\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}\right)\Psi\left(-\frac{L}{2}\right) \quad (\text{A.5})$$

siendo  $A\left(\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}\right)$  una matriz, que para este caso estará dada por:

$$A\left(\frac{L}{2}, -\frac{L}{2}\right) = A^{(0)}\left(\frac{L}{2}, \frac{a}{2}\right) A^\delta\left(\frac{a}{2}\right) A^{(0)}\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) A^\delta\left(-\frac{a}{2}\right) A^{(0)}\left(-\frac{a}{2}, -\frac{L}{2}\right) \quad (\text{A.6})$$

$A^{(0)}(x_f, x_i)$  está construida a partir de una base de soluciones de las ecuaciones homogéneas:

$$A^{(0)}(x_f, x_i) \equiv A^{(0)}(\Delta x) = \begin{pmatrix} \cosh(|k_{||}|\Delta x) & \sinh(|k_{||}|\Delta x) \\ \sinh(|k_{||}|\Delta x) & \cosh(|k_{||}|\Delta x) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

con  $\Delta x = x_f - x_i$ . Por otro lado,  $A^\delta\left(\frac{a}{2}\right)$  es una matriz que debe dar cuenta de la continuidad de la solución a lo largo de todo el intervalo, y de las discontinuidades de sus derivadas. por la presencia de los espejos en  $x = \frac{a}{2}$  y  $x = -\frac{a}{2}$ . De acuerdo a la notación usada en el capítulo 2 y la definición del potencial que muestra la figura (2.3) tendremos que:

$$A^\delta\left(-\frac{a}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_L(k_0 + vk_1)}{|k_{||}|} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$A^\delta\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_R(k_0)}{|k_{||}|} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Con estas consideraciones y los pasos mencionados en la sección 2.3.1 relacionados con tomar el límite  $L \rightarrow \infty$  y de derivar respecto al parámetro de separación  $a$  obtuvimos

---

el resultado (2.45).





# Bibliografía

- [1] Casimir, H. B. G. On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Indag. Math.*, **10**, 261–263, 1948. [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)]. [2](#)
- [2] Moore, G. T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *Journal of Mathematical Physics*, **11** (9), 2679–2691, 1970. [2](#)
- [3] Fulling, S. A., Davies, P. C. W. Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: Conformal anomaly. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **348** (1654), 393–414, 1976. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/348/1654/393>. [2](#)
- [4] Unruh, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, **14**, 870–892, Aug 1976. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.870>. [3](#)
- [5] Wilson, C., Johansson, G., Pourkabirian, A., Simoen, M., Johansson, J., Duty, T., *et al.* Observation of the dynamical casimir effect in a superconducting circuit. *Nature*, **479** (7373), 376–379, 2011. [3](#)
- [6] Ford, L. H., Vilenkin, A. Quantum radiation by moving mirrors. *Phys. Rev. D*, **25**, 2569–2575, May 1982. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.25.2569>. [3](#)
- [7] Bordag, M., Klimchitskaya, G., Mostepanenko, V. Corrections to the casimir force between plates with stochastic surfaces. *Physics Letters A*, **200** (2), 95 – 102, 1995. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019500139T>. [3](#)
- [8] Dodonov, V. Photon creation and excitation of a detector in a cavity with a resonantly vibrating wall. *Physics Letters A*, **207** (3), 126 – 132, 1995. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019500691U>. [3](#)

- [9] Golestanian, R., Kardar, M. Path-integral approach to the dynamic casimir effect with fluctuating boundaries. *Phys. Rev. A*, **58**, 1713–1722, Sep 1998. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.1713>. 3
- [10] Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D. Quantum dissipative effects in moving mirrors: A functional approach. *Phys. Rev. D*, **76**, 085007, Oct 2007. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.085007>. 3, 7, 17
- [11] Einstein, A. Zur quantentheorie der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, **18**, 1917. 3
- [12] Maghrebi, M. F., Golestanian, R., Kardar, M. Quantum cherenkov radiation and noncontact friction. *Phys. Rev. A*, **88**, 042509, Oct 2013. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.042509>. 4, 28, 41
- [13] Philbin, T. G., Leonhardt, U. No quantum friction between uniformly moving plates. *New Journal of Physics*, **11** (3), 033035, 2009. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/11/i=3/a=033035>. 4
- [14] Pendry, J. B. Quantum frictionfact or fiction? *New Journal of Physics*, **12** (3), 033028, 2010. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=3/a=033028>.
- [15] Leonhardt, U. Comment on 'quantum frictionfact or fiction?'. *New Journal of Physics*, **12** (6), 068001, 2010. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=6/a=068001>.
- [16] Pendry, J. B. Reply to comment on 'quantum frictionfact or fiction?'. *New Journal of Physics*, **12** (6), 068002, 2010. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=6/a=068002>. 4
- [17] Kleinert, H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets; 3rd ed. River Edge, NJ: World Scientific, 2004. 8
- [18] Itzykson, C., B., Z. J. Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980. 14
- [19] Zinn-Justin, J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena; 4th ed. Internat. Ser. Mono. Phys. Oxford: Clarendon Press, 2002. 15, 31, 35
- [20] Hye, J. S., Brevik, I. Casimir friction force and energy dissipation for moving harmonic oscillators. *EPL (Europhysics Letters)*, **91** (6), 60003, 2010. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/91/i=6/a=60003>. 29
- [21] Gel'fand, I. M., Yaglom, A. M. Integration in functional spaces and its applications in quantum physics. *Journal of Mathematical Physics*, **1** (1), 48–69, 1960.

- URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/1/1/10.1063/1.1703636>. 36
- [22] Belén Farías, M., Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., Rubio López, A. E. Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force. *Phys. Rev. D*, **91**, 105020, May 2015. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.105020>. 38, 42
- [23] Dunne, G. V. Functional determinants in quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41** (30), 304006, 2008. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/41/i=30/a=304006>. 43
- [24] Ttira, C. C., Fosco, C. D., Mazzitelli, F. D. Lifshitz formula for the casimir force and the gelfand-yaaglom theorem. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44** (46), 465403, 2011. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/44/i=46/a=465403>. 43



# Agradecimientos

A Cesar porque su paciencia parece infinita. A mi familia, por apoyarme a la distancia y por darme muchos motivos. A Viv, por ser Viv. A Mario e Isabel, por todo el aguante y el apoyo.

